

ADONAI SCHLUP SANT'ANNA

EVOLUÇÃO DINÂMICA DO SISTEMA TERRA - LUA

Dissertação apresentada ao Curso de
Pós-Graduação em Física do Setor de
Ciências Exatas da Universidade Federal
do Paraná, como requisito parcial à
obtenção do grau de Mestre em Ciências.

CURITIBA

1989

525.6

S332

Sant'Anna, Adonai Schlup

Evolução dinâmica do sistema Terra-Lua.
Curitiba, 1989.

65 p. il.

Dissertação-Mestrado-UFPR

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-
Graduação em Física do Setor de Ciências
Exatas da Universidade Federal do Paraná.

1. Marés.
2. Mecânica Celeste.
3. Física Matemática.



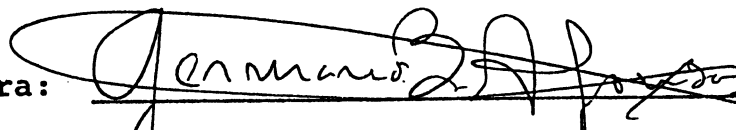
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA


ATA DA DEFESA DE TESE DE MESTRADO DO SR. ADONAI SCHLUP SANT'ANNA

Em sessão pública de defesa de tese iniciada às 14:30 horas, nesta data, após um seminário sobre o assunto da tese e arguição pela banca, esta decidiu atribuir Conceito A.

Curitiba, 29 de setembro de 1989.

Banca Examinadora:


Prof. GERMANO BRUNO AFONSO
Presidente - UFPR


Profª. DANIELA LAZZARO

ON/CNPq


Prof. LUIZ BERNARDO FERREIRA CLAUZET

IAG/USP

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Germano Bruno Afonso, pela orientação e assistência.

Aos Professores Liu Kai, Edson A. B. Stédile, Daniela Lazzaro e Luiz B. F. Clauzet, pelas sugestões.

A Universidade Federal do Paraná, pelos recursos técnicos.

A CAPES, pelo auxílio financeiro.

Aos colegas da pós-graduação, pelos estímulos.

RESUMO

Desenvolvemos um modelo da dinâmica do sistema Terra-Lua, considerando perturbações de marés.

Obtemos, com a ajuda de observações paleontológicas, uma expressão para o tempo de atraso de resposta das marés na Terra.

ABSTRACT

We point out a model for the dynamics of Earth-Moon system, including tidal perturbations.

By considering paleontological observations, an expression for the tidal time delay of Earth, is obtained.

Índice

Introdução.....	01
Capítulo I -Uma Primeira Aproximação para a	
Expressão de Δt	09
I.1 - Força e Torque Perturbadores.....	09
I.2 - Primeira Equação Dinâmica.....	14
I.3 - Pontos de Equilíbrio do Sistema Dinâmico.....	18
I.4 - Curva de Δt	22
Capítulo II -A Equação Dinâmica para a Inclinação do	
Plano Orbital em Relação ao Plano Absoluto.....	25
Capítulo III-A Segunda Aproximação para a Expressão	
de Δt	29
III.1 - Força e Torque Perturbadores.....	29
III.2 - O Formalismo Gaussiano.....	33
III.3 - Expressão de Δt	44
Capítulo IV -A Integração Numérica.....	50
IV.1 - Pontos de Equilíbrio do Sistema.....	50
IV.2 - Integração Numérica.....	52
Conclusão.....	62
Referências.....	64

INTRODUÇÃO

Por se tratar do corpo celeste mais próximo da Terra, a Lua vem sendo alvo de observações por parte dos astrônomos desde muito tempo atrás. Sua relativamente pequena distância ao nosso planeta permite uma maior exatidão na sua observação em relação a outros astros mais distantes.

Com isso, desde séculos atrás, astrônomos vem observando através de eclipses, um efeito ainda não formulado na época e que referia-se a uma aceleração secular da longitude da Lua em relação à Terra.

Em 1695 E. Halley tentou explicar esta aceleração em termos de perturbações gravitacionais de outros planetas. Mas seu modelo não chegou a se consagrar.

Foi no dia 19 de novembro de 1787 (ou 19 de dezembro segundo J. Montucla) que P. S. Laplace anunciou à Academia de Ciências seus resultados que apontavam como causa principal do fenômeno em questão, a perturbação do Sol sobre a excentricidade da órbita lunar. Laplace chegou a receber um prêmio da Academia de Ciências de Paris pelo seu trabalho.

Até que em 1853, J. Adams, de Cambridge, mostrou que o

modelo de Laplace não estava em total acordo com as observações.

Somente a partir de 1865, com o trabalho de C. Delaunay, que apareceram os primeiros estudos dos efeitos das marés na órbita da Lua e na rotação da Terra. No entanto é interessante notar que 33 anos antes do premiado trabalho de Laplace, o filósofo E. Kant já havia sugerido que as marés eram a causa principal do aumento da duração do dia.

Seguido de Delaunay, inúmeros têm sido os artigos, até hoje em dia, que se dedicam aos resultados de observação de dados do passado e do presente do sistema Terra-Lua e à modelagem envolvendo a importante contribuição dos efeitos de maré na perturbação de elementos orbitais de satélites naturais.

São exemplos os trabalhos de G. H. Darwin , P. Goldreich, W. M. Kaula, G. MacDonald, H. Gerstenkorn e F. Mignard.

Podemos, portanto resumir o modelo atual da seguinte maneira:

Devido a uma distribuição não-uniforme do potencial gravitacional lunar sobre a superfície terrestre, ocorre a formação de bulbos de maré mais facilmente perceptíveis nos oceanos do que na matéria sólida que compõe a Terra. Pois os oceanos são formados de matéria menos viscosa.

Em função da não-sincronicidade entre os movimentos de rotação da Terra e o de translação da Lua, estes bulbos ficam

movendo-se na superfície terrestre, caracterizando aquilo que conhecemos por correntes de maré. Este movimento da matéria menos viscosa cria um atrito com a matéria mais viscosa, que praticamente não sofre deformação e portanto não gera correntes de maré. Tal atrito implica em uma dissipação de energia na forma de calor. Aliás, a dissipação energética nas marés oceânicas é bem mais significativa nos mares e oceanos menos profundos do que nos mais profundos, devido ao fato de que nos mais rasos as correntes de maré são mais velozes. Tal dissipação faz com que a Terra perca energia cinética de rotação e conseqüentemente seu momento angular diminui. Se considerarmos o sistema Terra-Lua isolado, podemos concluir que seu momento angular total deve ser conservado. Logo a perda de rotação da Terra deve ser compensada com um ganho de momento angular de translação da Lua, o que faz com que ela se afaste da Terra. Pelo fato de o torque provocado pelo efeito de maré sobre a Lua ser inversamente proporcional à sexta potência da distância entre os dois corpos, seu efeito como agente perturbador faz-se sentir mais acentuadamente em sistemas que envolvem pequenas distâncias, o que limita sua importância à dinâmica do sistema solar, em especial aos sistemas planeta-satélites. Assim sendo, no caso da interação entre planetas e o Sol, o efeito de marés é mais pronunciável nos casos de Mercúrio e Vênus, mais modesto no caso da Terra e desprezível para os planetas mais distantes.

O modelo matemático que aqui apresentamos, mostra que existe uma tendência para que o sistema Terra-Lua atinja uma situação de equilíbrio, caracterizada pela ausência de correntes de marés. Ou seja, a tendência é que desapareça o efeito

dissipativo na energia total do sistema.

Vale observar que o citado efeito dissipativo não tem como contribuinte as marés atmosféricas. Mesmo por que estas são formadas por mudanças da temperatura na superfície terrestre, e não por interação gravitacional com a Lua. E os movimentos atmosféricos têm efeito desprezível na dinâmica Terra-Lua, se comparados com as marés terrestres e oceânicas. Tal observação já não é válida para Vênus, por exemplo. Marés atmosféricas neste planeta podem influenciar na dinâmica de sua rotação (Dobrovolskis e Ingersoll, 1980) e (Dobrovolskis, 1980, 1983).

As técnicas de observação para as quais chamamos a atenção, além da observação de eclipses, são as observações paleontológicas e as modernas técnicas que empregam o uso do laser.

No que se refere à Paleontologia, sabemos que os intervalos de tempo que controlam os ciclos vitais dos seres que habitam a Terra são o ano trópico, o mês sinódico e o dia solar. Conforme J. W. Wells (1963), é possível, através da análise de fósseis, estimar a duração destes intervalos de tempo na época em que esses fósseis viveram. O objeto de estudos de Wells foram corais rugosos do Devoniano Médio. Ou seja, sabe-se que 380 milhões de anos atrás o ano trópico tinha 400 dias solares. Através de métodos de Mecânica Celeste é possível também conhecer outros dados que se referem em especial ao passado do sistema Terra-Lua. Calcula-se, e.g., que a duração do dia solar no Devoniano Médio era de 22 horas e que a distância da Lua era de 58

raios terrestres, em contrapartida aos atuais 60.25 raios terrestres (Afonso, 1977).

No entanto, assim como a Paleontologia fornece dados relativos ao passado, as técnicas com laser fornecem dados relativos ao presente do sistema Terra-Lua. E com uma precisão que em teoria é absoluta e que na prática só depende de melhorias tecnológicas. Raios laser disparados da Terra atingem refletores de silício instalados na superfície lunar pelo Projeto Apollo e retornam ao nosso planeta, fornecendo distâncias com precisão na ordem de centímetros.

Dados experimentais como estes servirão para o fornecimento de parâmetros e condições iniciais que serão lançadas nas equações dinâmicas que obtivermos.

Assim sendo, nosso trabalho consiste em: através do formalismo dos números de Love, obtemos as expressões da força perturbadora e do torque perturbador provocados pelos bulbos de maré da Terra. No entanto, além disso, adotamos o formalismo de Darwin que consiste em considerarmos a resposta da Terra à Lua, caracterizada pela formação dos bulbos de maré, não imediata, mas com um certo atraso Δt . Este atraso de resposta Δt corresponde ao intervalo de tempo entre o instante em que a Terra "sente" a força gravitacional exercida pela Lua e o instante em que a maré é formada sobre a superfície da Terra como reação à ação da Lua.

O atraso de resposta de nosso planeta corresponde, atualmente, a um valor aproximado de 10 minutos.

Se a título de simplificação, considerarmos a excentricidade da órbita lunar nula, podemos, com o auxílio de um algebrismo relativamente simples, obter as equações que caracterizam as dinâmicas da distância Terra-Lua e da inclinação do plano orbital em relação a um plano inercial.

No entanto, para obtermos a equação diferencial que fornece a dinâmica da excentricidade, ou seja, um modelo menos simplificado, recorreremos ao formalismo Gaussiano para a Teoria das Perturbações.

Nossa proposta neste trabalho é fornecer uma expressão para Δt como função de parâmetros orbitais do sistema Terra-Lua ou mesmo do tempo, pois comumente Δt é tido como constante nas equações dinâmicas. Esta constância de Δt normalmente não é uma hipótese bem acolhida, como pode ser visto por exemplo em Mignard, 1978, pag. 307:

"The value of Δt determines the time scale of this problem and may have been very different in the past."

Esta expressão para o atraso de resposta Δt é obtida com um ajuste nas equações dinâmicas que obtivermos, de modo que, na integração numérica, elas tenham uma evolução compatível com as observações paleontológicas.

Começamos, portanto, o nosso trabalho com hipóteses simplificadas e depois sofisticamos nosso modelo. Com isso

apresentamos diferentes expressões para Δt , conforme o modelo que utilizamos.

Devemos finalmente lembrar que o estudo aqui apresentado é válido para outros sistemas planeta-satélite tais como Marte-Phobos, Netuno-Tritão, ou Plutão-Caronte, por exemplo. Se insistimos em resolver apenas o sistema Terra-Lua, isto se deve ao fato de que sabemos o insuficiente sobre outros sistemas.

E o que queremos dizer com isso não é apenas que conhecemos dados como os números de Love da Terra e da Lua ou o atraso de resposta Δt . Temos também termos comparativos com teorias sobre a origem da Lua. Principalmente por ser este assunto bastante atual.

Recentemente têm sido publicados resultados sobre pesquisas na área de formação e dinâmica do sistema solar envolvendo fenômenos de ressonância (Patterson, 1987). Em teoria deveria existir um planeta entre a Terra e Marte. Para explicar tal questão, levanta-se a hipótese de que após a dissipação do gás da nebulosa solar que teria originado o nosso sistema, poderia ter havido uma colisão deste hipotético planeta com a Terra. Tal modelo está em acordo com outro artigo escrito por Benz *et alli* em 1986.

Sobre estes resultados reside, portanto, a importância de nosso trabalho. Pois simulações numéricas devem estar em acordo entre si.

Assim sendo, no capítulo I apresentamos um primeiro modelo simplificado, no qual consideramos a excentricidade de órbita nula e a inclinação orbital igualmente nula. Com os resultados das observações paleontológicas apresentamos, portanto, uma primeira aproximação para o atraso de resposta Δt . Já no segundo capítulo apresentamos a equação que define a dinâmica da inclinação de órbita deduzida sem a necessidade do formalismo Gaussiano. No capítulo III temos uma segunda expressão para Δt obtida de maneira semelhante ao capítulo I, mas assumindo como hipótese que não apenas a distância varia com o tempo, mas também a inclinação do plano orbital da Lua e sua excentricidade de órbita. Até que finalmente no último capítulo realizamos integrações numéricas que nos conduzem a resultados que evidenciam que a hipótese de um Δt variável é bem mais compatível com as atuais teorias sobre a origem do sistema Terra-Lua.

CAPITULO I

UMA PRIMEIRA APROXIMAÇÃO PARA A EXPRESSÃO DE Δt

I.1 Força e Torque Perturbadores

Consideremos, como uma boa aproximação, o sistema Terra-Lua isolado, ou seja, não interagindo com o Sol, planetas ou quaisquer outros corpos celestes. Isto de imediato nos conduz a uma conservação do momento cinético total do sistema em questão.

Podemos também considerar, por enquanto, a órbita lunar como sendo circular, uma vez que sua excentricidade é de aproximadamente 0.05.

Então, conforme Kaula (1964), a ação de um satélite sobre um planeta, causando-lhe a deformação que chamamos de efeito de maré, pode ser estudada com o auxílio de um potencial escalar expandido em polinômios de Legendre:

$$U_o = \frac{Gm^*}{r^*} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r^*} \right)^l P_l(\cos s) \quad (I-01)$$

sendo que m^* é a massa do satélite, r^* o módulo do vetor posição do satélite em relação ao centro do planeta e s refere-se ao

ângulo entre o vetor \vec{r}^* e o vetor posição \vec{r} do ponto onde o potencial é calculado. G é a constante gravitacional.

Se supomos uma resposta instantânea da deformação em relação à força aplicada então a Teoria dos Números de Love nos fornece a expressão acima, porém, com um fator k_l em cada parcela. Se tomarmos apenas a parcela com $l=2$, desprezando as demais, então podemos escrever o potencial adicional causado pela deformação do planeta, sobre a superfície da Terra como sendo:

$$U(\vec{R}_E) = \frac{k_2 G m^*}{2r^{*5}} \left[3(\vec{R}_E \cdot \vec{r}^*)^2 - R_E^2 \cdot r^{*2} \right] \quad (I-02)$$

sendo R_E o raio equatorial da Terra. Assim, o potencial perturbador fora da Terra será dado pela solução exterior da equação de Laplace com a condição de contorno dada acima, e que segundo Kellogg (1967) é única e dada conforme vemos abaixo:

$$U(\vec{r}) = U(\vec{R}_E) \frac{R_E^3}{r^3}$$

Para a Terra o valor do número de Love de segundo grau, ou seja, k_2 é de aproximadamente 0.28 conforme Lambeck et al. (1973). Da equação acima e da expressão (I-02), temos:

$$U(\vec{r}) = k_2 \frac{G m^* R_E^5}{2r^{*5} \cdot r^5} \left[3(\vec{r} \cdot \vec{r}^*)^2 - r^2 \cdot r^{*2} \right] \quad (I-03)$$

Para introduzirmos o atraso de resposta Δt em nossa expressão do potencial temos que levar em consideração dois fatos importantes:

1.º- Os bulbos de maré formados na superfície terrestre são devidos a um efeito que a Lua exerceu Δt unidades de tempo atrás. Ou seja até que a Terra atinja sua configuração de equilíbrio o satélite natural já transladou um certo trecho de órbita (figura I.1).

2.º- Da mesma forma, devido a este atraso na resposta à ação da Lua, a Terra já girou um certo tanto durante Δt unidades de tempo (figura I.2).

Assim, como o potencial aditivo é uma consequência da deformação da Terra, então faz-se necessária uma transformação de coordenadas na expressão deste potencial perturbador, conforme vemos a seguir:

$$U(\vec{r}, \vec{r}^*) \rightarrow U(\vec{r}_1, \vec{r}_1^*)$$

donde:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}, \quad \vec{r}_1^* = \vec{r}^*(t - \Delta t) + \vec{\omega} \Delta t \times \vec{r}^* = \vec{r}^* - \vec{v}^* \Delta t + \vec{\omega} \Delta t \times \vec{r}^*$$

sendo \vec{v}^* a velocidade translacional da Lua e $\vec{\omega}$ o vetor de velocidade angular da Terra em torno de seu eixo.

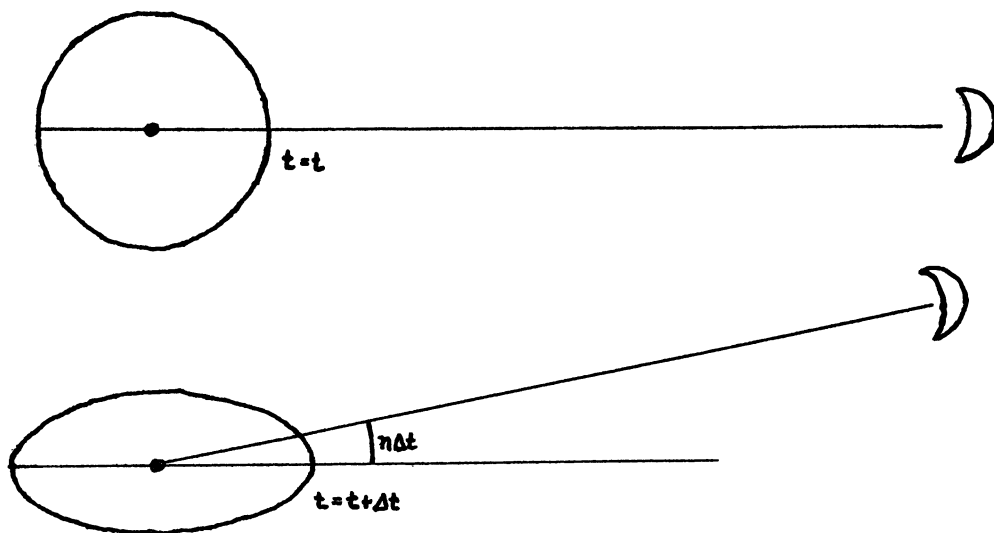


Fig. I.1- A translação da Lua durante o atraso de resposta.

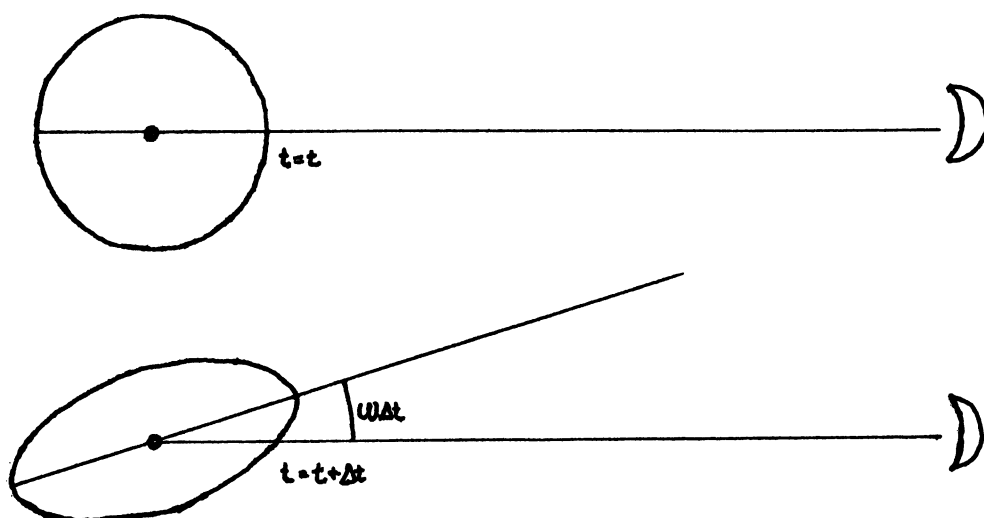


Fig. I.2- A rotação da Terra durante o atraso de resposta.

Expandindo o potencial com o novo sistema de coordenadas em uma série de Taylor em torno de \vec{r}^* , temos o que segue:

$$V = \text{grad}_{\vec{r}_1^*} U(\vec{r}, \vec{r}_1^*) \Big|_{\vec{r}_1^* = \vec{r}^*} [\vec{r}_1^* - \vec{r}^*], \quad \text{ou seja,}$$

$$V = \text{grad}_{\vec{r}_1^*} U(\vec{r}, \vec{r}_1^*) \Big|_{\vec{r}_1^* = \vec{r}^*} [\vec{\omega} \times \vec{r}^* - \vec{v}^*] \Delta t \quad (\text{I-04})$$

Como:

$$\text{grad}_{\vec{r}_1^*} U(\vec{r}, \vec{r}_1^*) \Big|_{\vec{r}_1^* = \vec{r}^*} = \frac{3k_2 G m^* R_E^5}{2r^5} \left[\frac{2(\vec{r} \cdot \vec{r}^*) \vec{r}}{r^{*5}} - \frac{5(\vec{r} \cdot \vec{r}^*)^2 \vec{r}^*}{r^{*7}} + \frac{r^2}{r^{*5}} \vec{r}^* \right] \quad (\text{I-05})$$

então:

$$V(\vec{r}, \vec{r}^*) = -3 \frac{k_2 G m^* R_E^5}{r^5 r^{*5}} \cdot \Delta t \left\{ (\vec{r} \cdot \vec{r}^*) [\vec{r}^* \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}^*) + \vec{r} \cdot \vec{v}^*] - \frac{(\vec{r}^* \cdot \vec{v}^*)}{2r^{*2}} [5(\vec{r} \cdot \vec{r}^*)^2 - r^2 r^{*2}] \right\} \quad (\text{I-06})$$

Nesta expansão em série de Taylor, assumimos somente a parcela de primeira ordem em Δt . A parcela independente de Δt foi desprezada por estarmos interessados em efeitos seculares, ou seja, efeitos dissipativos. E os termos de maior ordem em Δt foram desprezados com a hipótese de que Δt é suficientemente pequeno para tanto.

Como estamos interessados na dinâmica da Lua então a expressão para a força perturbadora a que a própria Lua está sujeita devido ao efeito de maré é dada por:

$$\vec{F} = m^* \cdot \text{grad}_{\vec{r}} V(\vec{r}, \vec{r}^*) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}^*} \quad (I-07)$$

Ou seja, retirando os asteriscos a equação acima fica:

$$\vec{F} = -3 \frac{k_2 G m^2 R_E^5}{r^{10}} \cdot \Delta t \left[2\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{v}) + r^2(\vec{r} \times \vec{\omega} + \vec{v}) \right] \quad (I-08)$$

Logo a expressão do torque é dada por:

$$\vec{T} = -3 \frac{k_2 G m^2 R_E^5}{r^8} \cdot \Delta t \left[(\vec{r} \cdot \vec{\omega})\vec{r} - r^2\vec{\omega} + \vec{r} \times \vec{v} \right] \quad (I-09)$$

I.2 Primeira Equação Dinâmica

Seja o que segue:

$$\vec{H} = \vec{H}_M + \vec{H}_E \quad (I-10)$$

donde \vec{H} refere-se ao momento cinético total do sistema e \vec{H}_M e \vec{H}_E são, respectivamente, os momentos angulares da Lua e da Terra.

Se derivarmos a equação (I-10) em relação ao tempo temos:

$$\frac{d}{dt}(\vec{H}_M) = -\frac{d}{dt}(\vec{H}_E) \quad (I-11)$$

Pois como anteriormente foi assumido, H é conservado por estarmos tratando de um sistema isolado. Como:

$$\frac{d}{dt}(\vec{H}_M) = \vec{T} \quad (I-12)$$

então:

$$\frac{d}{dt}(\vec{H}_E) = -\vec{T} \quad (I-13)$$

Lembrando também que:

$$\begin{aligned} \vec{H}_M &= m\vec{r} \times \vec{v} \\ \vec{H}_E &= C\vec{\omega} \end{aligned} \quad (I-14)$$

onde C é o momento principal de inércia da Terra em torno de seu eixo de rotação, também conhecido por momento polar de inércia.

Assim sendo, das equações (I-10) e (I-11) e observando que:

$$\vec{r} \cdot \vec{H}_M = 0 \quad (I-15)$$

podemos reescrever a expressão do torque como:

$$\dot{T} = - \frac{3k_2 G m^2 R_E^5}{C r^8} \cdot \Delta t \left[(\vec{r} \cdot \dot{\vec{R}}) r - r^2 \left(1 + \frac{C}{m r^2} \right) \dot{\vec{R}}_M \right] \quad (I-16)$$

Se considerarmos a órbita equatorial então o ângulo I entre $\dot{\vec{R}}_M$ e $\dot{\vec{R}}_E$ é nulo. Logo $\dot{\vec{R}}$ está em uma direção coincidente com as de $\dot{\vec{R}}_M$ e $\dot{\vec{R}}_E$. Assim:

$$\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{R}}_M = H \cdot H_M \quad (I-17)$$

Seja, portanto, o que segue:

$$\dot{\vec{R}}_M \cdot \frac{d}{dt} (\dot{\vec{R}}_M) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} (H_M^2) = \dot{T} \cdot \dot{\vec{R}}_M \quad (I-18)$$

conforme a equação (I-12). Das equações (I-14) e (I-16), temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (H_M^2) = -6 \frac{k_2 G m^2 R_E^5}{C r^8} \cdot \Delta t \left[(\vec{r} \cdot \dot{\vec{R}}) (\vec{r} \cdot \dot{\vec{R}}_M) - r^2 (\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{R}}_M) + \right. \\ \left. r^2 \left(1 + \frac{C}{m r^2} \right) \cdot H_M^2 \right] \end{aligned} \quad (I-19)$$

Fazendo

$$X = \frac{H_M^2}{G M m^2 R_E} \quad , \quad (I-20)$$

sendo M a massa da Terra, e lembrando que o módulo do momentum angular da Lua é calculado como segue

$$H_M = m(GMa)^{1/2}, \quad (I-21)$$

onde a é o raio da órbita, temos

$$X = \frac{a}{R_E} \quad (I-22)$$

Assim, a nova grandeza X aqui definida é a distância da Lua à Terra colocada em termos de raios terrestres.

Assim sendo, conforme as equações (I-15), (I-17) e (I-20), podemos reescrever a equação (I-19) como segue:

$$\frac{dX}{dt} = 4 \frac{k \Delta t}{X^7} \left[-X^2 + TX^{3/2} - \beta \right], \quad (I-23)$$

donde:

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{6\pi^2 k_2 (m/MD^2)}{\alpha P^2}, & P &= 2\pi \left(\frac{R_E^3}{GM} \right)^{1/2}, \\ \alpha &= \frac{C}{MR_E^2}, & \beta &= \alpha \frac{M}{m}, & T &= H(GMm^2 R_E)^{-1/2} \end{aligned} \right\} \quad (I-24)$$

observando que P refere-se ao período de um satélite rasante à superfície terrestre, ou seja, cujo raio orbital é R_E .

I.3 Pontos de Equilíbrio do Sistema Dinâmico

Podemos, a partir da definição dada à T nas equações (I-24), e das expressões (I-14), (I-17) e (I-21), reescrever a equação (I-10) como segue:

$$T(GMm^2R_E)^{1/2} = (GMm^2a)^{1/2} + C\omega. \quad (I-25)$$

Se definirmos uma grandeza H_0 correspondente a um padrão arbitrário de momento angular, e que é o momento angular do já citado satélite hipotético com a mesma massa da Lua, órbita equatorial e circular, cujo raio coincide com o raio terrestre, então teremos:

$$H_0 = (GMm^2R_E)^{1/2} \quad (I-26)$$

Dividindo a equação (I-25) por H_0 temos

$$T = \left(\frac{a}{R_E} \right)^{1/2} + \frac{C}{MR_E^2} \cdot \frac{M}{m} \cdot \omega \cdot \left(\frac{R_E^3}{GM} \right)^{1/2}, \quad (I-27)$$

ou seja,

$$T = \beta Y + X^{1/2} \quad (I-28)$$

donde:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{a}{R_E}, & Y &= \frac{\omega}{n_g} \\ n_g &= \left(\frac{GM}{R_E^3} \right)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (I-29)$$

lembrando que β já foi definido nas equações (I-24). Com isso vale observar que X é, portanto, a distância adimensionalizada entre a Terra e a Lua, Y é a velocidade angular da Terra em torno de seu próprio eixo igualmente adimensionalizada em função do movimento médio n_g do mesmo satélite rasante com momento angular H_0 . Consequentemente, T descreve um momento angular total do sistema Terra-Lua adimensionalizado em termos de H_0 .

Valendo-se do fato que a causa do efeito dissipativo no sistema Terra-Lua é o atraso de resposta Δt , e não o efeito de maré em si, então percebe-se que se Δt for nulo, ou seja, se houver um sincronismo entre os movimentos de rotação da Terra e o de translação da Lua, a condição de equilíbrio se estabelecerá. Deste modo não mais existirão perturbações nos elementos que definem o sistema em estudo. O leitor poderia criticar esta nossa heurística. No entanto, tal fato que relaciona a condição de sincronismo com o estado de equilíbrio do sistema será posteriormente demonstrado em termos matemáticos.

Conforme a terceira Lei de Kepler,

$$GM = n^2 a^3, \quad (I-30)$$

onde n é o movimento médio da Lua.

Para encontrarmos a região do espaço (X,Y) em que ocorre o equilíbrio há pouco mencionado, devemos substituir n da equação acima por ω , que é justamente o que define a condição de sincronismo. Assim temos:

$$\omega^2 a^3 = GM \quad (I-31)$$

Logo, conforme a definição dada a n_0 nas equações (I-29), podemos reescrever a equação (I-31) da seguinte maneira:

$$\frac{\omega}{n_0} \left[\frac{a}{R_E} \right]^{3/2} = 1 \quad (I-32)$$

ou ainda,

$$YX^{3/2} = 1 \quad (I-33)$$

Substituindo este resultado na equação (I-28), chegamos a uma equação algébrica de quarto grau completa, como segue:

$$Y^4 - 3 \frac{T}{\beta} Y^3 + 3 \frac{T^2}{\beta^2} Y^2 - \frac{T^3}{\beta^3} Y + \frac{1}{\beta^3} = 0 \quad (I-34)$$

cujas soluções reais são dadas por:

$$\left. \begin{aligned}
Y_A &= -x_1 + \frac{3T}{4\beta} , & Y_B &= -x_2 + \frac{3T}{4\beta} , \text{ donde:} \\
x_{1,2} &= \frac{1}{2} \left[z_1^{1/2} \pm 2r_2^{1/2} \cos(\theta_2/2) \right] , \\
\theta_2 &= \arctg \left[\frac{2}{\beta^{3/2} \operatorname{tg}(2\alpha)} \cdot \left(\frac{2}{3^{1/2} \beta^{3/2} \operatorname{sen}(2\alpha)} + \frac{T^2}{4\beta^2} \right)^{-1} \right] , \\
r_2 &= \left[\left(\frac{2}{3^{1/2} \beta^{3/2} \operatorname{sen}(2\alpha)} + \frac{T^2}{4\beta^2} \right)^2 + \frac{4}{\beta^3 \operatorname{tg}^2(2\alpha)} \right]^{1/2} , \\
z_1 &= \frac{-4}{3^{1/2} \beta^{3/2} \operatorname{sen}(2\alpha)} + \frac{T^2}{4\beta^2} , \\
\alpha &= \arctg \left[\left(\operatorname{tg} \left(\frac{\gamma}{2} \right) \right)^{1/3} \right] , & \gamma &= \arcsen \left(\frac{-16\beta}{3T^2 (3\beta)^{1/2}} \right)
\end{aligned} \right\} \quad (I-35)$$

Se θ_2 for positivo devemos substituir seu valor por $\theta_2 + \pi$. Devemos observar também que:

$$X_{A,B} = Y_{A,B}^{-2/3} \quad (I-36)$$

As outras duas raízes de nossa equação biquadrada são complexas. Para o sistema Terra-Lua temos:

$$\begin{array}{ll}
X_A \cong 84.4 & Y_A \cong 1.29 \times 10^{-3} \\
X_B \cong 2.31 & Y_B \cong 0.285
\end{array} \quad (I-37)$$

I.4 Curva de Δt

Do trabalho de Wells podemos inferir que existe, pelo menos desde 500 milhões de anos atrás, uma dependência linear entre a velocidade angular de rotação da Terra em torno de seu eixo e a variação instantânea da mesma no tempo. Assim sendo, com tal resultado baseado nas observações paleontológicas, aliado a o que foi obtido nas equações (I-37), é possível escrever o que segue:

$$\frac{dY}{dt} = K(Y - Y_A) \quad (I-38)$$

Como em nosso caso o valor de Y está diminuindo, segundo Wells, então K é negativo e Y_A é um atrator. Por se tratar de uma equação diferencial linear, a solução da equação (I-38) é dada por:

$$Y = (Y_T - Y_A) \exp(Kt) + Y_A \quad (I-39)$$
$$\therefore Y_T = Y \Big|_{t=0}$$

O instante $t = 0$ convencionamos ser o instante t -presente, ou seja, Y_T é o valor atual de Y .

Se $Y = Y_D = Y \Big|_{t=-500 \text{ milhões de anos}}$, cujo valor é conhecido das observações arqueológicas, podemos então isolar o valor de K na equação (I-39).

Finalmente, se derivarmos no tempo a equação (I-28) teremos:

$$\frac{dX}{dt} = -2\beta X^{1/2} \frac{dY}{dt} \quad (I-40)$$

Substituindo a equação (I-39) na equação (I-38), e por sua vez esta na equação acima, chegamos a

$$\frac{dX}{dt} = -2K\beta X^{1/2} (Y_T - Y_A) \exp(Kt) \quad (I-41)$$

Verificando que K é negativo, Y diminui com o tempo, cf. Wells, Y_T é maior que Y_A e que β é positivo. Assim verificamos na expressão obtida acima que X aumenta com o tempo, o que de fato vem ocorrendo há centenas de milhões de anos.

Vamos agora reescrever as equações (I-23) e (I-41) da seguinte forma:

$$\frac{dX}{dt} = \Delta t \cdot f(X) \quad (I-42)$$

$$\frac{dX}{dt} = g(X, t) \quad (I-43)$$

sendo que $f(X)$ e $g(X, t)$ são dadas como:

$$f(X) = \frac{4k}{X^7} \left[-X^2 + TX^{3/2} - \beta \right] \quad (I-44)$$

$$g(X, t) = -2K\beta X^{1/2} (Y_T - Y_A) \exp(Kt) \quad (I-45)$$

Sabendo que as equações (I-42) e (I-43) devem evoluir da mesma forma, podemos ajustar uma expressão para Δt de modo que isso ocorra, ou seja:

$$\Delta t = \Delta t(X, t) = \frac{g(X, t)}{f(X)}. \quad (I-46)$$

Integrando numericamente a equação (I-41) e não a (I-23), pois aquela foi obtida com base em dados experimentais, de $t_0=0$ até $t_f = -500$ milhões de anos, e inserindo cada par de valores (X, t) na expressão dada para Δt acima, teremos uma curva $(X, \Delta t)$ que, em primeira aproximação, pode ser gerada pela equação de uma reta.

Assim sendo:

$$\Delta t = aX + b \quad (I-47)$$

Para a integração numérica do sistema Terra-Lua, adotamos:

$$\left. \begin{aligned} k &= 3.18 \times 10^{17} / (10^6 \text{anos})^2, \quad K = -2.60 \times 10^{-4} / (10^6 \text{anos}) \\ T &= 85, \quad \beta = 26.8, \quad Y_T = 5.88 \times 10^{-2}, \\ Y_A &= 1.28 \times 10^{-3}, \quad X_0 = 60 \end{aligned} \right\} \quad (I-48)$$

Com isso temos um Δt de aproximadamente 11 minutos, e os valores para a e b são:

$$\begin{aligned} a &= 2.01 \times 10^{-12} \times 10^6 \text{anos} \\ b &= -9.94 \times 10^{-11} \times 10^6 \text{anos} \end{aligned} \quad (I-49)$$

CAPITULO II

A EQUAÇÃO DINÂMICA PARA A INCLINAÇÃO DO PLANO ORBITAL EM RELAÇÃO AO PLANO ABSOLUTO

Consideraremos agora os efeitos seculares que as marés e seu atraso de resposta Δt exercem sobre a inclinação da órbita lunar em relação a um certo plano inercial.

Este plano inercial em Mecânica Celeste corresponde ao plano principal. Aqui o definiremos como um plano cartesiano xy de um sistema de referência cujo eixo z , perpendicular a x e a y , é coincidente com a direção do momentum cinético total do sistema Terra-Lua, conforme a figura II.1

Chamaremos de i o ângulo entre o plano orbital lunar e o plano principal. I é a inclinação entre os planos orbital da Lua e o equatorial da Terra. Finalmente, J define o ângulo que o plano equatorial terrestre forma com o plano principal. Desta forma:

$$I = i + J \quad (II-01)$$

Se $I = i = J = 0$ então teremos uma órbita equatorial como já foi visto. De acordo com o primeiro capítulo observamos que a

condição de que o ângulo i deveria, em primeira aproximação, ser nulo, só foi introduzida na equação (I-19) para a obtenção da equação dinâmica (I-23).

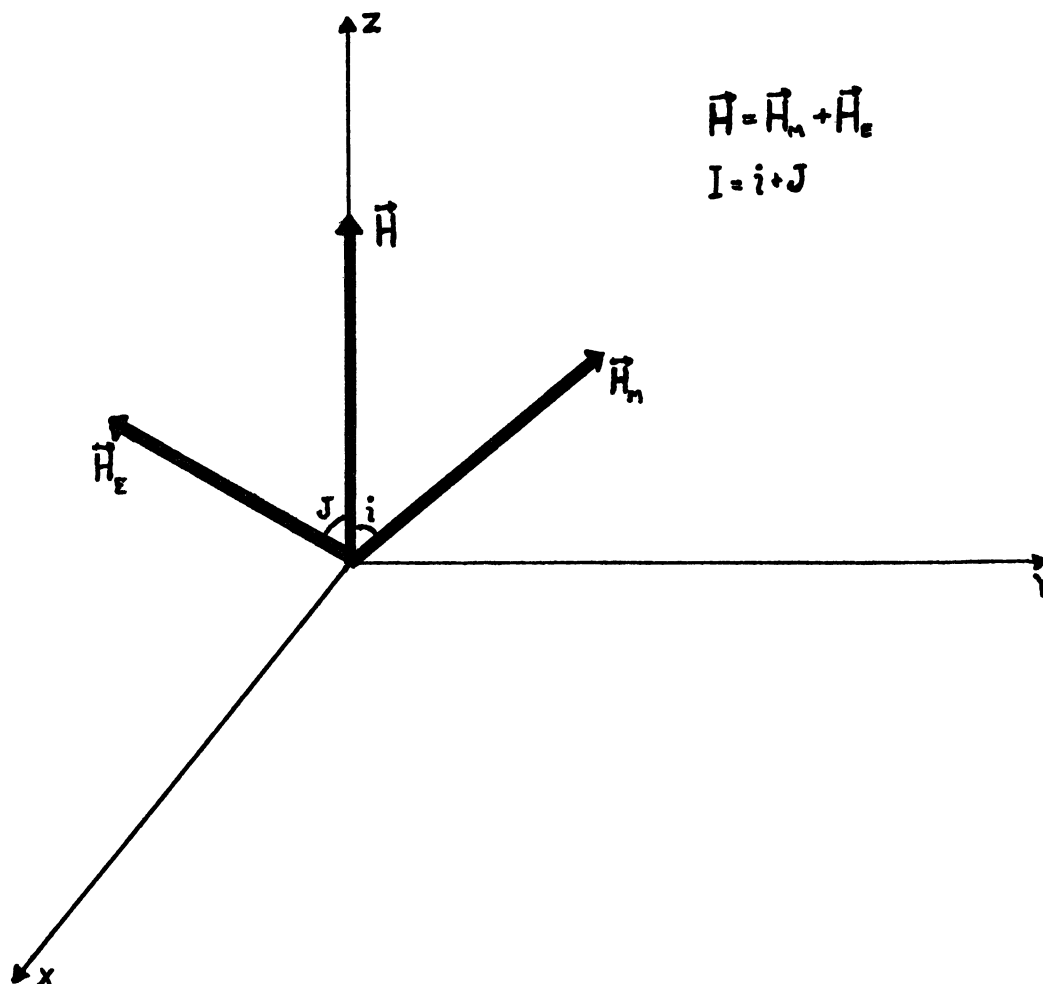


Fig. II.1- O sistema inercial de referência.

No entanto, se fizermos $i \neq 0$ então podemos reescrever a equação (I-17) da seguinte maneira:

$$\vec{H} \cdot \vec{H}_M = H \cdot H_M \cos i \quad (II-02)$$

Conseqüentemente as equações (I-15), (II-02), (I-20) e (I-19) nos garantem o que segue:

$$\frac{dX}{dt} = 4 \frac{k \Delta t}{X^7} \left[-X^2 + 7X^{3/2} \cos i - \beta \right] \quad (\text{II-03})$$

Com a introdução da nova incógnita i em nossa equação diferencial, devemos analisar qual a sua evolução neste sistema dissipativo. Para tanto consideremos o que segue:

$$\dot{H} \cdot \frac{d}{dt} (\dot{H}_M) = \frac{d}{dt} (\dot{H} \cdot \dot{H}_M) = \dot{T} \cdot \dot{H} \quad (\text{II-04})$$

Ou seja, conforme a equação (I-16), temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\dot{H} \cdot \dot{H}_M) = -3 \frac{k_2 G m^2 R_E^5}{C r^8} \cdot \Delta t \left[(\dot{r} \cdot \dot{H})^2 - r^2 H^2 + \right. \\ \left. r^2 \left(1 + \frac{C}{m r^2} \right) (\dot{H} \cdot \dot{H}_M) \right] \quad (\text{II-05}) \end{aligned}$$

Faremos agora a média de um fator de uma das parcelas da equação acima sobre um período orbital:

$$\langle (\dot{r} \cdot \dot{H})^2 - r^2 H^2 \rangle = \langle H^2 z^2 - r^2 H^2 \rangle = -H^2 \langle x^2 + y^2 \rangle =$$

$$-H^2 \frac{a^2}{2} (1 + \cos^2 i) \quad (\text{II-06})$$

conforme as equações do movimento elíptico, assumindo que a excentricidade é nula, o que aqui corresponde a uma órbita circular de raio a . Podemos, portanto reescrever a equação (II-05) do seguinte modo:

$$\frac{d}{dt}(\dot{H} \cdot \dot{H}_M) = -3 \frac{k_2 G m^2 R_E^5}{C r^8} \cdot \Delta t \left[-\frac{H^2 a^2}{2} - \frac{H^2 a^2 \cos^2 i}{2} + \right. \\ \left. r^2 (\dot{H} \cdot \dot{H}_M) + \frac{C}{m} (\dot{H} \cdot \dot{H}_M) \right],$$

ou seja:

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{k \Delta t T}{X^{19/2}} (1 - Z^2) \quad (II-07)$$

donde:

$$Z = \cos i \quad (II-08)$$

Se $i=0$ então $\frac{dZ}{dt} = 0$.

Finalmente, das equações (I-19) e (II-02), obtemos:

$$\frac{dX}{dt} = 4k \frac{\Delta t}{X^7} [-X^2 + T X^{9/2} Z - \beta] \quad (II-09)$$

Se como caso particular, considerarmos a inclinação i nula, então a equação acima fica na forma da equação (I-23).

CAPITULO III

A SEGUNDA APROXIMAÇÃO PARA A EXPRESSÃO DE Δt

III.1 Força e Torque Perturbadores

Veremos agora os efeitos que as marés somadas ao movimento não sincronizado da Lua em relação à rotação da Terra, têm sobre a excentricidade da órbita lunar, em simultaneidade com as dinâmicas da distância que separa a Terra da Lua e da inclinação do plano orbital do satélite em relação ao já citado plano principal.

No que se refere à variação da excentricidade, se admitirmos uma órbita inicial elíptica temos que, em função de ser o torque perturbador proporcional ao inverso da sexta potência da distância entre o planeta e o satélite, o acréscimo do momento cinético no satélite faz-se perceber mais intensamente no pericentro do que no apocentro. E é justamente isso que gera a dinâmica na excentricidade orbital.

Ainda trabalharemos com a hipótese de um sistema de dois corpos que não recebe demais influências externas. Desta forma podemos escrever o potencial aditivo para o caso de uma resposta imediata, ou seja, com Δt nulo, conforme Mignard, 1978:

$$U(\vec{r}) = \sum_{l=2}^{\infty} k_l \frac{Gm^* R_E^{2l+1}}{r^{l+1} r^{*l+1}} \cdot P_l \left[\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}^*}{r \cdot r^*} \right] \quad (III-01)$$

onde k_l o Número de Love de ordem l .

Executando a mesma transformação de coordenadas feita no capítulo I para a introdução do atraso de resposta Δt temos:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r} \\ \vec{r}_1^* &= \vec{r}^*(t - \Delta t) + \vec{\omega} \Delta t \times \vec{r}^* = \vec{r}^* - \vec{v}^* \Delta t + \vec{\omega} \times \vec{r}^* \Delta t \end{aligned} \quad (III-02)$$

donde:

$$U(\vec{r}, \vec{r}^*) \rightarrow U(\vec{r}_1, \vec{r}_1^*)$$

Podemos, então, reescrever o novo potencial como segue:

$$\left. \begin{aligned} U(\vec{r}_1, \vec{r}_1^*) &= \sum_l U_l(\vec{r}_1, \vec{r}_1^*), \quad \text{sendo} \\ U_l(\vec{r}_1, \vec{r}_1^*) &= k_l Gm^* R_E^{2l+1} \varphi_l(r_1, r_1^*) P_l(x), \quad \text{donde} \\ x &= \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1^*}{r_1 \cdot r_1^*}, \quad \varphi_l(r_1, r_1^*) = \frac{1}{r_1^{l+1} r_1^{*l+1}} \end{aligned} \right\} \quad (III-03)$$

Se expandirmos U_l em uma série de Taylor em torno de \vec{r}^* , o termo de primeira ordem em Δt será:

$$\nabla_{\vec{r}_1^*} U \Big|_{\vec{r}_1^* = \vec{r}^*} [\vec{r}_1^* - \vec{r}^*]$$

(III-04)

onde o primeiro fator da expressão acima é dado como segue:

$$\nabla_{\vec{r}_1^*} U \Big|_{\vec{r}_1^* = \vec{r}^*} = k_l G m^* R_E^{2l+1} \left[P_l(x) \frac{\partial}{\partial r^*} \varphi_l(r, r^*) \frac{\vec{r}^*}{r^*} + \right. \\ \left. \varphi_l(r, r^*) \frac{d}{dx} P_l(x) \left(\frac{\vec{r}}{r r^*} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}^*) \vec{r}^*}{r \cdot r^{*3}} \right) \right] \quad (III-05)$$

Assim sendo, cada parcela do potencial U expandido em série de Taylor, pode ser escrita, conforme a expressão (III-04), como segue:

$$V_l = k_l G m^* \Delta t R_E^{2l+1} \left[(\vec{r}^* \cdot \vec{v}^*) \left(\frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}^*) \varphi_l P'_l(x)}{r \cdot r^{*3}} - \frac{P_l(x)}{r^*} \cdot \frac{\partial}{\partial r^*} \varphi_l \right) + \right. \\ \left. \frac{\vec{r} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}^* - \vec{v}^*)}{r \cdot r^*} \cdot \varphi_l P'_l(x) \right] \quad (III-06)$$

$$\therefore P'_l(x) = \frac{d}{dx} P_l(x)$$

A parcela independente de Δt não foi considerada por estarmos interessados nos efeitos dissipativos. E os termos em Δt de ordens superiores foram desprezados por considerarmos Δt suficientemente pequeno para tanto.

Mas,

$$\vec{F}_l = m^* \vec{\nabla}_r V_l, \quad \text{donde } \vec{F} = \sum_{l=2}^{\infty} \vec{F}_l$$

Fazendo $\vec{r} = \vec{r}^*$, pois estamos interessados nas perturbações seculares exercidas sobre a própria Lua, temos:

$$\begin{aligned} \vec{F}_l = -k_l G m^2 \Delta t R_E^{2l+1} & \left[\frac{\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{v})}{r^2} \left(\frac{(1+1)^2}{r^{2l+4}} - \frac{1}{r^{2l+4}} P'_l(1) \right) + \right. \\ & \left. \frac{1}{r^{2l+2}} P'_l(1) \left(\frac{\vec{r} \times \vec{\omega}}{r^2} + \frac{\vec{v}}{r^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (III-07)$$

Lembrando que $P'_l(1) = \frac{l(l+1)}{2}$, resulta

$$\begin{aligned} \vec{F}_l = -G m^2 k_l \Delta t R_E^{2l+1} \cdot \frac{1}{r^{2(l+1)}} & \left[\frac{(1+1)(1+2)}{2} (\vec{r} \cdot \vec{v}) \vec{r} + \right. \\ & \left. \frac{l(l+1)}{2} r^2 (\vec{v} + \vec{r} \times \vec{\omega}) \right] \end{aligned} \quad (III-08)$$

Sendo $\vec{T} = \sum_{l=2}^{\infty} \vec{T}_l$, então

$$\vec{T}_l = r \times \vec{F}_l.$$

Logo:

$$\vec{F}_l = -Gm^2 k_l \Delta t R_E^{2l+1} \frac{1}{r^{2(l+2)}} \left[\frac{1(1+1)}{2} \left((\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \vec{r} - r^2 \vec{\omega} + \vec{r} \times \vec{v} \right) \right], \quad (\text{III-09})$$

pois $\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{\omega}) = (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{\omega}$.

III.2 O Formalismo Gaussiano

Utilizaremos agora o formalismo gaussiano para a Teoria das Perturbações, na obtenção das equações dinâmicas que caracterizam o sistema em questão. Sejam R, S e W três componentes mutuamente perpendiculares entre si, da aceleração perturbadora $\frac{\vec{F}}{\mu}$, sendo μ a massa reduzida do sistema Terra-Lua. R é a componente da aceleração na direção do raio vetor, S é a componente da mesma na direção paralela ao plano orbital e perpendicular ao raio vetor, e, finalmente, W trata-se da terceira componente da aceleração perturbadora com direção perpendicular ao plano de órbita.

Assim sendo,

$$R_l = \frac{\vec{F}_l \cdot \vec{r}}{\mu \cdot r}; \quad S_l = \frac{\vec{F}_l \cdot (\vec{H}_M \times \vec{r})}{\mu \cdot |\vec{H}_M \times \vec{r}|}; \quad W_l = \frac{\vec{F}_l \cdot \vec{H}_M}{\mu \cdot H_M} \quad (\text{III-10})$$

onde

$$R = \sum_{l=2}^{\infty} R_l ; \quad S = \sum_{l=2}^{\infty} S_l ; \quad T = \sum_{l=2}^{\infty} T_l \quad (III-10')$$

Observando que $\vec{H}_M = m\vec{r} \times \vec{v}$, cujo módulo, para excentricidade não desprezível, é dado como segue:

$$H_M = mna^2(1-e^2)^{1/2} \quad \therefore n = \left[\frac{GM}{a^3} \right]^{1/2} \quad (III-11)$$

sendo e a excentricidade de órbita. Assim as seguintes relações são válidas:

$$\vec{v} \cdot (\vec{H}_M \times \vec{r}) = m(v \cdot ((\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r})) = m((\vec{r} \times \vec{v}) \cdot (\vec{r} \times \vec{v})), \text{ ou seja,}$$

$$\vec{v} \cdot (\vec{H}_M \times \vec{r}) = mn^2 a^4 (1-e^2) \quad (III-12)$$

$$(\vec{H}_M \times \vec{r}) \cdot (\vec{r} \times \vec{\omega}) = m((\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r}) \cdot (\vec{r} \times \vec{\omega}) = m(\vec{\omega} \cdot ((\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r}) \times \vec{r}), \text{ ou seja,}$$

$$(\vec{H}_M \times \vec{r}) \cdot (\vec{r} \times \vec{\omega}) = -mr^2 na^2 (1-e^2)^{1/2} \omega \cdot \cos I \quad (III-13)$$

$$\vec{H}_M \cdot (\vec{r} \times \vec{\omega}) = m(\vec{r} \times \vec{v}) \cdot (\vec{r} \times \vec{\omega}) = mr^2 \cdot (\vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{v})) = \\ mr |\vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{v})| \cos(\bar{\omega} + \nu) \sin I, \text{ ou seja,}$$

$$\vec{H}_M \cdot (\vec{r} \times \vec{\omega}) = mrna^2(1-e^2)^{1/2} \omega \cdot \cos(\bar{\omega} + \nu) \cdot \sin I \quad (III-14)$$

donde $\bar{\omega}$ e ν são, respectivamente, a longitude do periélio medido do nodo ascendente e a anomalia verdadeira do satélite. Agora

podemos desenvolver as expressões para R_l , S_l e W_l , conforme as equações (III-10):

$$R_l = \frac{-Gm^2 k_l \Delta t R_E^{2l+1}}{\mu r} \cdot \frac{1}{r^{2(l+3)}} \left[\frac{(1+1)(1+2)}{2} (\vec{r} \cdot \vec{v}) \vec{r} \cdot \vec{r} + \right. \\ \left. \frac{1(1+1)}{2} r^2 (\vec{r} \cdot \vec{v}) \right], \text{ ou seja,}$$

$$R_l = \frac{-Gm^2 k_l \Delta t R_E^{2l+1}}{\mu r^{2l+5}} (\vec{r} \cdot \vec{v}) (1+1)^2 \quad (\text{III-15})$$

$$\text{Mas } \vec{r} = r \hat{r} ; \quad \vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta},$$

onde o ponto denota a derivada em relação ao tempo. Os versores \hat{r} e $\hat{\theta}$ são mutuamente perpendiculares entre si, sendo que $\hat{\theta}$ pertence ao plano orbital. Já $\dot{\theta}$ refere-se à velocidade angular da Lua. Assim

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = r \dot{r} = \frac{naer \cdot \sin \nu}{(1-e^2)^{1/2}}$$

$$R_l = -G \frac{m^2}{\mu} \cdot k_l \Delta t R_E^{2l+1} (1+1)^2 \frac{ne}{a^{2l+3} (1-e^2)^{1/2}} \left(\frac{a}{r} \right)^{2(l+2)} \sin \nu$$

(III-16)

$$S_l = \frac{Gm^2 k_l \Delta t R_E^{2l+1}}{\mu r^{2(l+3)} |H_M \times r|} \left[\frac{1(1+1)}{2} \cdot r^2 \left(v \cdot (H_M \times r) + (r \times \omega) \cdot (H_M \times r) \right) \right]$$

$$S_l = \frac{-Gm^2 k_l \Delta t R_E^{2l+1} l(l+1)}{2\mu} \left[\frac{n}{a^{2l+3}} \cdot (1-e^2)^{1/2} \left(\frac{a}{r} \right)^{2l+3} - \frac{\omega \cos I}{a^{2l+3}} \left(\frac{a}{r} \right)^{2l+3} \right], \quad (\text{III-17})$$

$$W_l = \frac{-Gm^2 k_l \Delta t R_E^{2l+1}}{\mu r^{2(l+3)}} \cdot \frac{1}{mna^2(1-e^2)^{1/2}} \left[\frac{l(l+1)}{2} \cdot r^2 H_M \cdot (r \times \omega) \right] +$$

$$W_l = \frac{-Gm^2 k_l \Delta t R_E^{2l+1} l(l+1) \omega}{2\mu a^{2l+3}} \left(\frac{a}{r} \right)^{2l+3} \cos(\bar{\omega} + \nu) \cdot \sin I \quad (\text{III-18})$$

sendo as equações dinâmicas dadas por:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{n(1-e^2)^{1/2}} \left[R \cdot e \cdot \sin \nu + (1-e^2) \frac{a}{r} S \right] \\ \frac{de}{dt} &= \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na} \left[R \cdot \sin \nu + S \left(\frac{1}{e} - \frac{r}{ea} + \cos \nu \right) \right] \\ \frac{di}{dt} &= \frac{r \cdot \cos(\bar{\omega} + \nu)}{na^2(1-e^2)^{1/2}} W \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-19})$$

Faremos uma expansão do movimento elíptico em termos de uma série finita de potências de e , utilizando o formalismo dos coeficientes de Hansen.

Seja, portanto, $\langle \boxed{} \rangle$ uma média de $\boxed{}$. Desta forma

$$\langle R_l e. \sin \nu \rangle = \frac{-Gm^2 k_l \Delta t n (1+1)^2 e^2 R_E^{2l+1}}{\mu a^{2l+3} (1-e^2)^{1/2}} \left\langle \left(\frac{a}{r} \right)^{2(l+2)} \sin^2 \nu \right\rangle =$$

$$\frac{-Gm^2 k_l \Delta t n (1+1)^2 e^2 R_E^{2l+1}}{2\mu a^{2l+3} (1-e^2)^{1/2}} \left[\left\langle \left(\frac{a}{r} \right)^{2l+4} \right\rangle - \left\langle \left(\frac{a}{r} \right)^{2l+4} \cos(2\nu) \right\rangle \right]$$

(III-20)

Seja ainda

$$\left. \begin{aligned} \left\langle \left(\frac{a}{r} \right)^j \right\rangle &= H(j, 0) \\ \left\langle \left(\frac{a}{r} \right)^j \cos \nu \right\rangle &= H(j, 1) \\ \left\langle \left(\frac{a}{r} \right)^j \cos (2\nu) \right\rangle &= H(j, 2) \end{aligned} \right\} \quad (\text{ III-21 })$$

Sendo válida a seguinte fórmula de recorrência:

$$H(j, 2) = H(j, 0) - \frac{2(1-e^2)}{e(j-1)} H(j+1, 1), \quad (\text{ III-22 })$$

podemos escrever as seguintes relações:

$$\left. \begin{aligned} HC(j,0) &= \frac{A_j}{(1-e^2)^{j-3/2}} \\ HC(j,1) &= \frac{B_j}{(1-e^2)^{j-3/2}} \end{aligned} \right\}$$

(III-23)

Coeficientes A_j e B_j são dados para alguns valores de j , conforme as tabelas abaixo:

Tabela III.01

j	A_j
6	$1 + 3e^2 + \frac{3}{8} \cdot e^4$
7	$1 + 5e^2 + \frac{15}{8} \cdot e^4$
8	$1 + \frac{15}{2} \cdot e^2 + \frac{45}{8} \cdot e^4 + \frac{5}{16} \cdot e^6$
9	$1 + \frac{21}{2} \cdot e^2 + \frac{105}{8} \cdot e^4 + \frac{35}{16} \cdot e^6$
10	$1 + 14e^2 + \frac{210}{8} \cdot e^4 + \frac{35}{4} \cdot e^6 + \frac{35}{128} \cdot e^8$

Tabela III.02

j	B_j
6	$2e + \frac{3}{2} \cdot e^3$
7	$\frac{5}{2} \cdot e + \frac{15}{4} \cdot e^3 + \frac{5}{16} \cdot e^5$
8	$3e + \frac{30}{4} \cdot e^3 + \frac{15}{8} \cdot e^5$
9	$\frac{7}{2} \cdot e + \frac{105}{8} \cdot e^3 + \frac{105}{16} \cdot e^5 + \frac{35}{128} \cdot e^7$
10	$4e + 21e^3 + \frac{35}{2} \cdot e^5 + \frac{35}{16} \cdot e^7$

Estas são as tabelas dos A_j e B_j que utilizaremos em nosso trabalho.

Desta maneira temos

$$\langle R_l e. \sin \nu \rangle = \frac{-Gm^2 k_l \Delta t n (1+1)^2 e^2 R_E^{2l+1}}{2\mu a^{2l+3} (1-e^2)^{1/2}} (H(2l+4,0) - H(2l+4,2))$$

ou seja,

$$\langle R_l e. \sin \nu \rangle = \frac{-Gm^2 k_l R_E^{2l+1} \Delta t (1+1)^2 (1-e^2)^{1/2} e. n}{\mu (2l+3) a^{2l+3}} H(2l+5,1) \quad (III-24)$$

A expressão para a expansão de $\frac{a}{r} S_l$ é obtida de maneira análoga:

$$\langle \frac{a}{r} S_l \rangle = \frac{-Gm^2 k_l \Delta t R_E^{2l+1} l(1+1)n}{2\mu a^{2l+3}} \left[(1-e^2)^{1/2} H(2l+6,0) - \frac{\omega \cos I}{n} H(2l+4,0) \right] \quad (III-25)$$

Para $l=2$ obtemos

$$\langle R_2 e. \sin \nu \rangle = \frac{-9Gm^2 k_2 R_E^5 \Delta t (1-e^2) e. n. B_p}{7\mu a^7 (1-e^2)^{15/2}},$$

$$\langle \frac{a}{r} S_2 \rangle = \frac{-3Gm^2 k_2 \Delta t. R_E^5. n}{\mu a^7} \left[\frac{A_{10}}{(1-e^2)^8} - \frac{\omega \cos I}{n} \cdot \frac{A_0}{(1-e^2)^{13/2}} \right].$$

o que nos conduz a

$$\left\langle R_2 e. \sin \nu \right\rangle = \frac{-9Gm^2 k_2 R_E^5 \Delta t. n. e^2}{2\mu a^7 (1-e^2)^7} \left[1 + \frac{15}{4}. e^2 + \frac{15}{8}. e^4 + \frac{5}{64}. e^6 \right] \quad (III-26)$$

$$\left\langle \frac{a}{r} S_2 \right\rangle = \frac{-3Gm^2 k_2 R_E^5 \Delta t. n}{\mu a^7} \left[\frac{1}{(1-e^2)^8} \left(1 + 14e^2 + \frac{105}{4}. e^4 + \frac{35}{4}. e^6 + \frac{35}{128}. e^8 \right) - \frac{\omega}{n} \cdot \frac{\cos I}{(1-e^2)^{13/2}} \cdot \left(1 + \frac{15}{2}. e^2 + \frac{45}{8}. e^4 + \frac{5}{16}. e^6 \right) \right] \quad (III-27)$$

Substituindo estes resultados na equação (III-19) encontramos

$$\frac{dX}{dt} = \frac{24\pi^2 k_2 m^2 \Delta t}{M. \mu. P^2 X^7} \left[-\frac{1}{(1-e^2)^{15/2}} \left(1 + \frac{31}{2}. e^2 + \frac{255}{8}. e^4 + \frac{185}{16}. e^6 + \frac{25}{64}. e^8 \right) + \frac{\omega. \cos I}{n(1-e^2)^6} \left(1 + \frac{15}{2}. e^2 + \frac{45}{8}. e^4 + \frac{5}{16}. e^6 \right) \right] \quad (III-28)$$

Para a obtenção da segunda equação dinâmica, ou seja, a variação temporal da excentricidade, é necessário expandir as

parcelas $R_l \sin \nu$ e $S_l(e^{-1} - r/(ea) + \cos \nu)$.

Da equação (III-24) temos:

$$\langle R_l \sin \nu \rangle = \frac{-Gm^2 k_l R_E^{2l+1} \Delta t (1+1)^2 (1-e^2)^{1/2} n}{\mu(2l+3) \cdot a^{2l+3}} \cdot H(2l+5, 1) \quad (\text{III-29})$$

Já a segunda expansão é encaminhada como segue:

$$\begin{aligned} \left\langle S_l \left(\frac{1}{e} - \frac{r}{e \cdot a} + \cos \nu \right) \right\rangle &= \frac{-Gm^2 k_l \Delta t \cdot R_E^{2l+1} l(1+1) \cdot n}{2e\mu a^{2l+3}} \left[\right. \\ &\quad (1-e^2)^{1/2} \left[H(2l+5, 0) - H(2l+4, 0) + eH(2l+5, 1) \right] - \\ &\quad \left. \frac{\omega}{n} \cos I \left[H(2l+3, 0) - H(2l+2, 0) + eH(2l+3, 1) \right] \right] \quad (\text{III-30}) \end{aligned}$$

Aplicando a seguinte fórmula de recorrência:

$$H(j, 0) = \frac{1}{1-e^2} \left[H(j-1, 0) + eH(j-1, 1) \right], \quad (\text{III-31})$$

às equações (III-23) e fazendo $l=2$, temos o que segue:

$$\left\langle S_l \left(\frac{1}{e} - \frac{r}{e \cdot a} + \cos \nu \right) \right\rangle = \frac{-6Gm^2 k_2 \Delta t \cdot R_E^5 n}{2e\mu a^7} \left[\right.$$

$$(1 - e^2)^{3/2} \cdot \frac{A_{10}}{(1 - e^2)^{17/2}} - (1 - e^2)^{1/2} \cdot \frac{A_8}{(1 - e^2)^{13/2}} -$$

$$\frac{\omega}{n} \cdot \cos I \left[\frac{(1 - e^2) A_8}{(1 - e^2)^{13/2}} - \frac{A_6}{(1 - e^2)^{9/2}} \right] \quad (\text{III-32})$$

Substituindo este último resultado e a equação (III-29) para $l=2$ na segunda expressão das equações (III-19), e aplicando as expansões dadas nas tabelas III.01 e III.02, obtemos finalmente a segunda equação dinâmica para a função perturbadora:

$$\frac{de}{dt} = 12\pi^2 k_2 \frac{m^2 \Delta t}{M \mu P^2 X^8} \left[- \frac{1}{(1 - e^2)^{13/2}} \left(9e + \frac{135}{4} \cdot e^3 + \frac{135}{8} \cdot e^5 + \right. \right.$$

$$\left. \frac{45}{64} \cdot e^7 \right) + \frac{\omega}{n} \cdot \frac{\cos I}{(1 - e^2)^5} \left(\frac{11}{2} \cdot e + \frac{33}{4} \cdot e^3 + \frac{11}{16} \cdot e^5 \right) \right] \quad (\text{III-33})$$

Para obtermos nossa terceira e última equação diferencial, que descreve nosso sistema dinâmico, devemos observar as seguintes relações:

$$\sin I = \frac{H}{H_E} \cdot \sin i \quad (\text{III-34})$$

e

$$n = \left[\frac{GM}{a^3} \right]^{1/2} \quad (\text{III-35})$$

A primeira relação foi obtida a partir do módulo do produto externo entre a equação (I-10) e o momento cinético da Lua. Já a segunda é a terceira Lei de Kepler, conforme a equação (I-30).

Reescrevendo a equação (III-34) como segue

$$\text{sen } I = \frac{T(GMm^2R_E)^{1/2} \text{sen } i}{C\omega}, \quad (\text{III-36})$$

e substituindo este resultado junto com as expressões (III-35) e (III-18) na terceira das equações (III-19) temos

$$\frac{di}{dt} = \frac{-a^{3/2} G m^2 k_l R_E \Delta t. l(l+1). \omega}{2(GM)^{1/2} \mu a(1-e^2)^{1/2} a^{2l+3}} \left(\frac{a}{r}\right)^{2l+2} \cos^2(\bar{\omega} + \nu) \frac{T(GMm^2R_E)^{1/2} \text{sen } i}{C\omega}$$

Fazendo $l = 2$ e observando as relações (I-24) e (I-29), chegamos a

$$\frac{di}{dt} = \frac{-12\pi^2 k_2 m^2 \Delta t. \mu. T. \text{sen } i}{\mu P^2 \alpha M^2 X^{13/2} (1-e^2)^{1/2}} \cdot \cos^2(\bar{\omega} + \nu) \left(\frac{a}{r}\right)^6 \quad (\text{III-37})$$

Mas:

$$\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^6 \cos^2(\bar{\omega} + \nu) \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^6 \right\rangle = \frac{1}{2} H(6,0) \quad (\text{III-38})$$

logo

$$\frac{di}{dt} = \frac{-6\pi^2 k_2 m^2 \Delta t T \sin i}{M^2 P^2 \alpha X^{13/2} (1-e^2)^5} \left(1 + 3e^2 + \frac{3}{8} e^4 \right) \quad (\text{III-39})$$

Se fizermos $e=0$, obteremos a equação (II-07).

III.3 Expressão de Δt

Se multiplicarmos a equação (I-10) internamente por \dot{H}_M , teremos a seguinte relação:

$$H \cos i - H_E \cos I = H_M \quad (\text{III-40})$$

Recapitulando, ainda, que

$$\left. \begin{aligned} H &= T(GMm^2 R_E)^{1/2}; \\ H_E &= C\omega; \quad H_M = mna^2(1-e^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-41})$$

podemos reescrever a equação (III-40) da seguinte maneira:

$$\frac{\omega}{n} \cos I = \frac{1}{\beta} \left[TX^{3/2} \cos i - X^2 (1-e^2)^{1/2} \right] \quad (\text{III-42})$$

ou, conforme a equação (III-35),

$$\omega = \frac{1}{\beta \cos i} \cdot \left(\frac{GM}{R_E^3} \right)^{1/2} \left[T \cos i - X^{1/2} (1-e^2)^{1/2} \right] \quad (\text{III-43})$$

de onde concluímos

$$\cos i = \frac{T \cos i - X^{1/2} (1-e^2)^{1/2}}{(T^2 - 2TX^{1/2} (1-e^2)^{1/2} \cos i + X(1-e^2))^{1/2}}. \quad (\text{III-44})$$

Derivando a equação (III-43) em relação ao tempo temos o

$$\dot{\omega} = \frac{m(GM)^{1/2}}{MaR_E^{3/2} \cos i} \left[-T \dot{i} \sin i - \frac{\dot{X} (1-e^2)^{1/2}}{2X^{1/2}} + \frac{e \dot{e} X^{1/2}}{(1-e^2)^{1/2}} - \right. \\ \left. \frac{T \cos i}{\cos i} \cdot \frac{d}{dt} (\cos i) + \frac{X^{1/2} (1-e^2)^{1/2}}{\cos i} \cdot \frac{d}{dt} (\cos i) \right] \quad (\text{III-45})$$

donde, conforme equação (III-44),

$$\frac{d}{dt} (\cos i) = \frac{1}{2} \left[\frac{-T^2 \dot{X} (1-e^2)^{1/2} \sin^2 i}{X^{1/2}} + \frac{2T^2 X^{1/2} e \dot{e} \sin^2 i}{(1-e^2)^{1/2}} + \right. \\ \left. 2i T^2 \sin i (X^{1/2} (1-e^2)^{1/2} \cos i - T) \right] \left[T^2 - 2TX^{1/2} (1-e^2)^{1/2} \cos i + \right. \\ \left. X(1-e^2) \right]^{-3/2}. \quad (\text{III-46})$$

No primeiro capítulo admitimos $\dot{\omega} = K(\omega - \omega_A)$. Isto se multiplicarmos a equação (I-38) por n_0 . Aqui consideraremos apenas os resultados das observações paleontológicas onde $\dot{\omega}$ é linearmente dependente de ω . O motivo reside no fato de que no primeiro capítulo fizemos uma integração numérica no período do Devoniano Médio aos dias atuais. A presença de ω_A na expressão de $\dot{\omega}$ consistia em um refinamento das informações sobre este período.

Por termos a intenção de extrapolar certos resultados, o que posteriormente ficará mais claro, suporemos

$$\dot{\omega} = K' \omega \quad (\text{III-47})$$

Se compararmos esta equação com a equação (III-45), poderemos obter uma expressão para o atraso de resposta Δt como uma função de X , e e i . Assim sendo

$$\Delta t = \frac{K' \omega}{F(X, e, i)} \quad (\text{III-48})$$

donde:

$$F(X, e, i) = \frac{m(GMD)^{1/2}}{MaR_E^{3/2} \cos I} \left[-T \bar{i} \sin i + \frac{\bar{e} \bar{e}. X^{1/2}}{(1-e^2)^{1/2}} - \frac{\bar{X}(1-e^2)^{1/2}}{2X^{1/2}} + \right. \\ \left. \frac{X^{1/2}(1-e^2)^{1/2}}{\cos I} \cdot \bar{D} - \frac{T \cdot \cos i}{\cos I} \cdot \bar{D} \right], \quad (\text{III-49})$$

sendo \bar{X} , \bar{e} , \bar{i} e \bar{D} dados como segue:

$$\bar{X} = \frac{24\pi^2 k_2 m^2}{M\mu P^2 X^7} \left[-\frac{1}{(1-e^2)^{15/2}} \left(1 + \frac{31}{2} \cdot e^2 + \frac{255}{8} \cdot e^4 + \frac{185}{16} \cdot e^6 + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{25}{64} \cdot e^8 \right) + \frac{\omega \cos I}{n(1-e^2)^6} \left(1 + \frac{15}{2} \cdot e^2 + \frac{45}{8} \cdot e^4 + \frac{5}{16} \cdot e^6 \right) \right], \quad (\text{III-50})$$

$$\bar{I} = \frac{-6\pi^2 k_2 m^2 T \cdot \sin i}{M^2 P^2 \alpha X^{19/2} (1-e^2)^5} \left(1 + 3 \cdot e^2 + \frac{3}{8} \cdot e^4 \right), \quad (\text{III-51})$$

$$\bar{e} = \frac{12\pi^2 k_2 m^2}{M\mu P^2 X^9} \left[\frac{-e}{(1-e^2)^{13/2}} \left(9 + \frac{135}{4} \cdot e^2 + \frac{135}{8} \cdot e^4 + \frac{45}{64} \cdot e^6 \right) + \right. \\ \left. \frac{\omega \cdot \cos I}{n(1-e^2)^5} \cdot e \left(\frac{11}{2} + \frac{33}{4} \cdot e^2 + \frac{11}{16} \cdot e^6 \right) \right], \quad (\text{III-52})$$

$$\bar{D} = \frac{1}{2} \left[\frac{-T^2 \bar{X} (1-e^2)^{1/2} \sin^2 i}{X^{1/2}} + \frac{2T^2 X^{1/2} e \bar{e} \cdot \sin^2 i}{(1-e^2)^{1/2}} + \right. \\ \left. 2\bar{I} T^2 \sin i (X^{1/2} (1-e^2)^{1/2} \cos i - T) \right] \left[T^2 - 2TX^{1/2} (1-e^2)^{1/2} \cos i + \right. \\ \left. X(1-e^2) \right]^{-3/2}. \quad (\text{III-53})$$

Percebemos então que a expressão para Δt , dada pela equação (III-48), não é simples. Se fizermos $e = 0$ e $i = 0$, como um caso particular, concluiremos que I , \bar{i} , \bar{e} e \bar{D} se anulam. Quanto à expressão para \bar{X} , temos o seguinte:

$$\bar{X} = \frac{24\pi^2 k_2 m^2}{M\mu P^2 X^2} \left[-1 + \frac{\omega}{n} \right], \quad (\text{III-54})$$

de modo que a expressão para F é dada por

$$F(X, e, i) = \frac{-m(GM)^{1/2} \bar{X}}{2M\alpha R_E^{3/2} X^{1/2}} \quad (\text{III-55})$$

Logo, a equação de Δt neste caso particular pode ser escrita como

$$\Delta t = \frac{-\alpha M^2 K' \mu P^2 X^{15/2} (T - X^{1/2})}{12\pi^2 m^3 k_2 (-\beta + TX^{3/2} - X^2)} \quad (\text{III-56})$$

cujas representação é dada no gráfico III.01.

No intervalo que compreende X_p até X_{hoje} , ou seja, desde 380 milhões de anos atrás até hoje, a curva $\Delta t(X)$ é, em primeira aproximação, uma reta, conforme vimos no primeiro capítulo.

Outra observação que gostaríamos de levantar é que, a despeito da dependência linear entre $\dot{\omega}$ e ω ser verificada em um intervalo de tempo de centenas de milhões de anos, o que

corresponde a um período muito pequeno comparado com as escalas geológicas, tal hipótese levada a cabo sobre um intervalo de tempo maior conduz a uma curva de Δt , que do ponto de vista qualitativo corresponde à realidade. Pois sabemos que para a atual dependência linear entre $\dot{\omega}$ e ω , o atraso de resposta vem aumentando com o tempo. Mas sabemos também que, no futuro, quando o sistema Terra-Lua atingir seu estado de equilíbrio, deverá existir um sincronismo entre a rotação da Terra e a translação da Lua que por sua vez deverá zerar Δt ou torná-lo infinito, conforme posição relativa dos bulbos de maré.

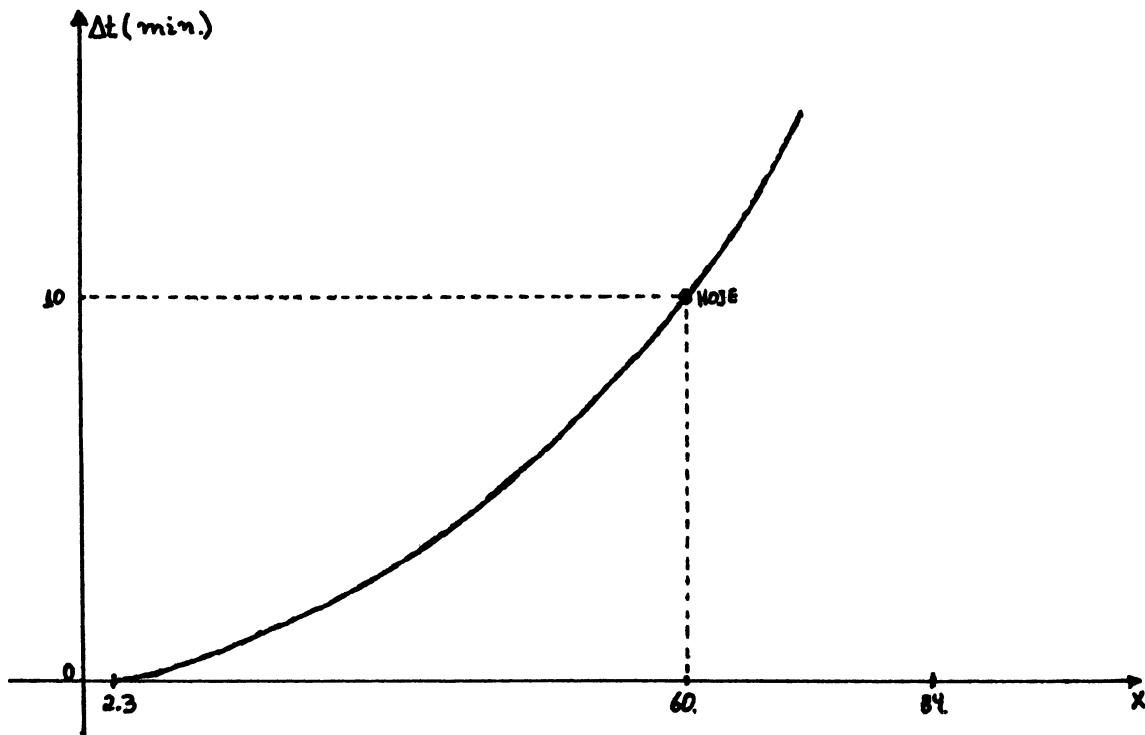


Gráfico III.01 - A curva do atraso de resposta para excentricidade e inclinação nulas.

CAPITULO IV

A INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

IV.1 Pontos de Equilíbrio do Sistema

O sistema dinâmico até aqui desenvolvido pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{24\pi^2 k_2 m^2 \Delta t}{M\mu P^2 X^7 (1-e^2)} \left[\frac{-1}{(1-e^2)^{13/2}} \left(1 + \frac{31}{2} \cdot e^2 + \frac{255}{8} \cdot e^4 + \frac{185}{16} \cdot e^6 + \frac{25}{64} \cdot e^8 \right) + \frac{\omega \cdot \cos I}{n(1-e^2)^5} \left(1 + \frac{15}{2} \cdot e^2 + \frac{45}{8} \cdot e^4 + \frac{5}{16} \cdot e^6 \right) \right] \quad (IV-01)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{12\pi^2 k_2 m^2 \Delta t \cdot e}{M\mu P^2 X^9} \left[-\frac{1}{(1-e^2)^{13/2}} \left(9 + \frac{135}{4} \cdot e^2 + \frac{135}{8} \cdot e^4 + \frac{45}{64} \cdot e^6 \right) + \frac{\omega \cdot \cos I}{n(1-e^2)^5} \left(\frac{11}{2} + \frac{33}{4} \cdot e^2 + \frac{11}{16} \cdot e^4 \right) \right] \quad (IV-02)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{-6\pi^2 k_2 m^2 \Delta t \cdot T \sin i}{M^2 P^2 \alpha X^{13/2} (1-e^2)^5} \left(1 + 3e^2 + \frac{3}{8} \cdot e^4 \right) \quad (IV-03)$$

Percebemos que os pontos (X,e,i) iguais a $(0,e,i)$, $(X,1,i)$, ou $(0,1,i)$ são singularidades no sistema dinâmico em questão.

Identificaremos, agora, os pontos de equilíbrio de nosso sistema. A equação (IV-03) pode zerar somente quando a inclinação i anular-se, pois os quatro valores de e que podem zerar o fator $1 + 3e^2 + (3/8)e^4$ da citada equação são complexos. Em nosso problema e é uma variável real compreendida no intervalo de zero a um, exclusive o um.

Na equação (IV-02) percebemos que se $e=0$ então de/dt anula-se. Provaremos que $e=0$ é o único valor da excentricidade que pode anular simultaneamente de/dt e dX/dt . Para tanto, suponhamos, por absurdo, que exista um $e \neq 0$ que zere $\frac{dX}{dt}$ e $\frac{de}{dt}$ simultaneamente.

Para isto ocorrer, deveríamos, conforme as equações dinâmicas, ter a igualdade abaixo satisfeita para algum $e \neq 0$:

$$\frac{\left(1 + \frac{31}{2} \cdot e^2 + \frac{255}{8} \cdot e^4 + \frac{185}{16} \cdot e^6 + \frac{25}{64} \cdot e^8\right)}{\left(9 + \frac{135}{4} \cdot e^2 + \frac{135}{8} \cdot e^4 + \frac{45}{64} \cdot e^6\right)} = \frac{\left(1 + \frac{15}{2} \cdot e^2 + \frac{45}{8} \cdot e^4 + \frac{5}{16} \cdot e^6\right)}{\left(\frac{11}{2} + \frac{33}{4} \cdot e^2 + \frac{11}{16} \cdot e^4\right)} \quad (IV-04)$$

No intervalo $[0,1]$, o único valor de e que satisfaz a igualdade acima é $e = 1$.

Logo, $e=0$ é o único valor real que pode zerar de/dt , independentemente da razão ω/n .

Quanto à expressão para dX/dt , se $e=0$ e $i=0$ são

condições de equilíbrio então podemos reescrever a equação (IV-01) do seguinte modo:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{24\pi^2 k_z m^2 \Delta t}{M \mu P^2 X^7} \left[-1 + \frac{\omega}{n} \right] \quad (IV-05)$$

Assim sendo, a expressão acima é nula se e somente se $\omega = n$, que é justamente a já citada condição de sincronismo. Conforme vimos no primeiro capítulo, tal condição de sincronismo somente existe quando $X = X_A$ ou $X = X_B$. Ou seja, $(X, e, i) = (X_{A,B}, 0, 0)$ são os únicos dois pontos de equilíbrio de nosso sistema dinâmico.

Nós aqui nos preocupamos com os pontos de equilíbrio antes mesmo da integração numérica propriamente dita, para que fique facilitado o estudo dos diagramas de fase gerados pelas soluções das equações diferenciais (IV-01), (IV-02) e (IV-03).

IV.2 Integração Numérica

Devido à alta não linearidade das citadas equações diferenciais que caracterizam a dinâmica do sistema Terra-Lua, causada fundamentalmente pelas altas potências de X , a integração numérica torna-se dificultosa. Esta dificuldade não surge no período que vai do Devoniano até hoje. Ela é mais perceptível se fizermos uma integração de hoje para um passado mais remoto.

Para que possamos, portanto, executar nosso trabalho, reescreveremos as equações dinâmicas como segue:

$$\frac{dX}{dI} = \frac{-4Ma}{\mu T X^{1/2} \sin i} \left[\frac{-1}{(1 - e^2)^{5/2}} \left(1 + \frac{31}{2} \cdot e^2 + \frac{255}{8} \cdot e^4 + \frac{195}{16} \cdot e^6 + \frac{25}{64} \cdot e^8 \right) + \frac{\omega \cdot \cos I}{n(1 - e^2)} \left(1 + \frac{15}{2} \cdot e^2 + \frac{45}{8} \cdot e^4 + \frac{5}{16} \cdot e^6 \right) \right] \cdot \left(1 + 3 \cdot e^2 + \frac{3}{8} \cdot e^4 \right)^{-1} \quad (IV-06)$$

$$\frac{de}{dI} = \frac{-2Ma}{\mu T X^{3/2} \sin i} \left[\frac{-1}{(1 - e^2)^{3/2}} \left(9e + \frac{135}{4} \cdot e^3 + \frac{135}{8} \cdot e^5 + \frac{45}{64} \cdot e^7 \right) + \frac{\omega \cdot \cos I}{n} \left(\frac{11}{2} \cdot e + \frac{33}{4} \cdot e^3 + \frac{11}{16} \cdot e^5 \right) \right] \cdot \left(1 + 3e^2 + \frac{3}{8} \cdot e^4 \right)^{-1} \quad (IV-07)$$

$$\frac{dt}{dI} = \frac{-M^2 P^2 \alpha X^{13/2} (1 - e^2)^5}{6\pi^2 k_2 m^2 \Delta t T \sin i} \left(1 + 3e^2 + \frac{3}{8} \cdot e^4 \right)^{-1} \quad (IV-08)$$

Com isso, um integrador Runge-Kutta de quarta ordem pode perfeitamente ser aplicado nestas equações. Percebe-se que a obtenção das triplas (X,e,i) independe de Δt . O atraso de resposta somente influenciará a escala temporal do problema.

O resultado relevante aqui neste trabalho, é que se fizermos a integração das equações (IV-06) e (IV-07), obtendo desta forma as triplas (X,e,i) que serão substituídas na integração da equação (IV-08), para a obtenção de escalas de

tempo, podemos ter dois resultados bem distintos:

1.º- Se considerarmos o atraso de resposta Δt constante, conforme o formalismo de Mignard, então condições iniciais correspondentes às atuais excentricidade, distância e inclinação, para uma integração em que o passo de i seja positivo (para o passado), conduzirão a um ponto de máxima aproximação em -1.57 bilhão de anos.

2.º- Se, no entanto, considerarmos um atraso de resposta Δt variável, cuja expressão é fornecida pela equação (III-48), e inserirmos esta variação na equação (IV-08), teremos uma escala de tempo consideravelmente maior. Pelas equações dinâmicas, tal ponto de máxima aproximação ocorre em -6.60 bilhões de anos.

A segunda hipótese de um Δt variável, mesmo baseada em observações paleontológicas que compreendem um período de centenas de milhões de anos, a qual foi extrapolada para um intervalo de tempo consideravelmente maior, é bem mais compatível com as modernas teorias sobre a formação do sistema Terra-Lua do que a consideração de um Δt constante. Este aumento na escala de tempo deve-se ao fato de Δt diminuir para o passado.

A seguir temos alguns gráficos resultantes da integração numérica.

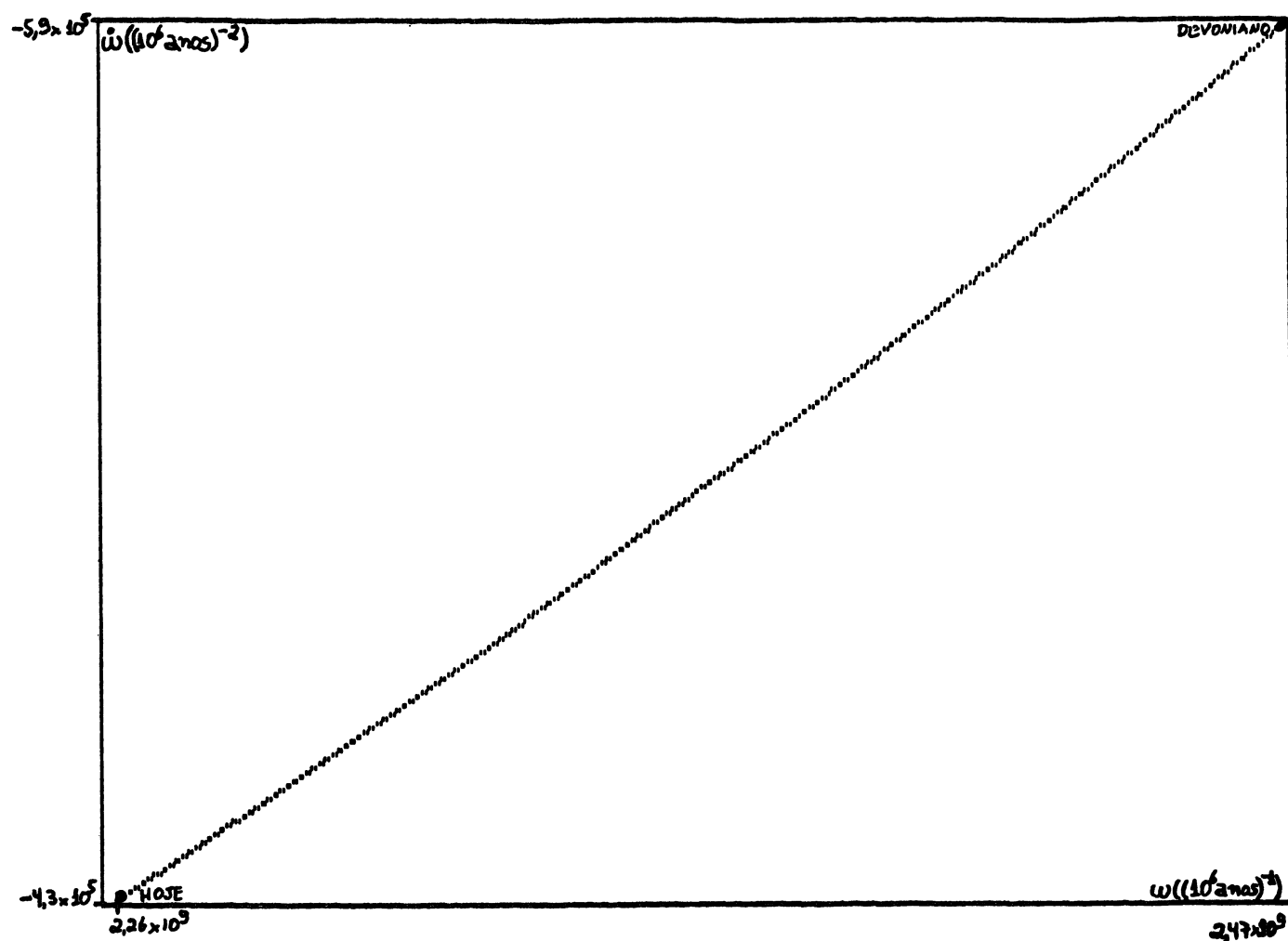


Gráfico IV.01- Velocidade angular de rotação da Terra no eixo das abscissas e a variação da mesma no tempo, no eixo das ordenadas. A integração numérica é feita do Devoniano até hoje.

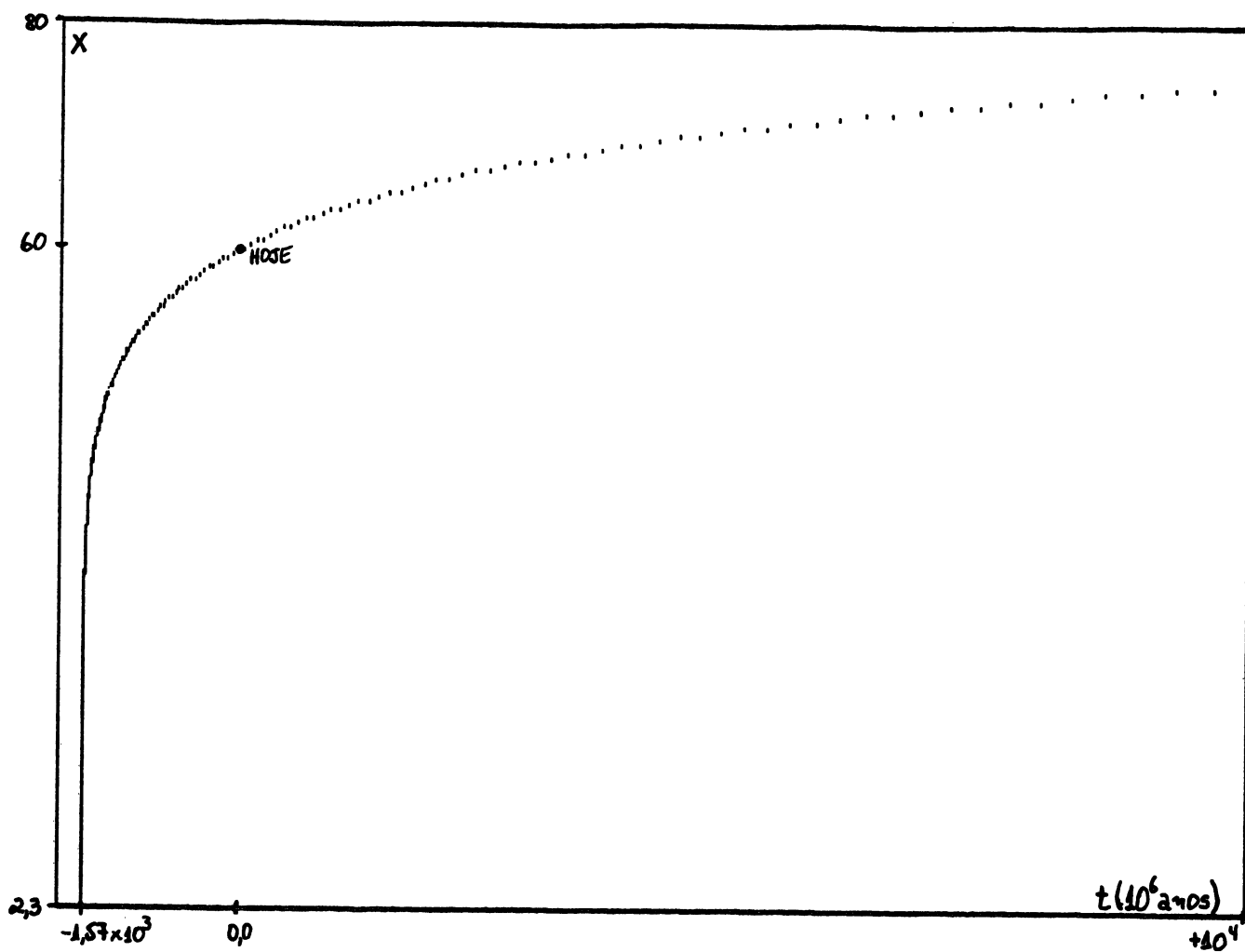


Gráfico IV.02- X versus t , com atraso de resposta constante.

Observamos aqui que à medida que o tempo flui para o futuro, a curva de integração assintota $X = 84.8$, que é uma das coordenadas de um ponto de equilíbrio.

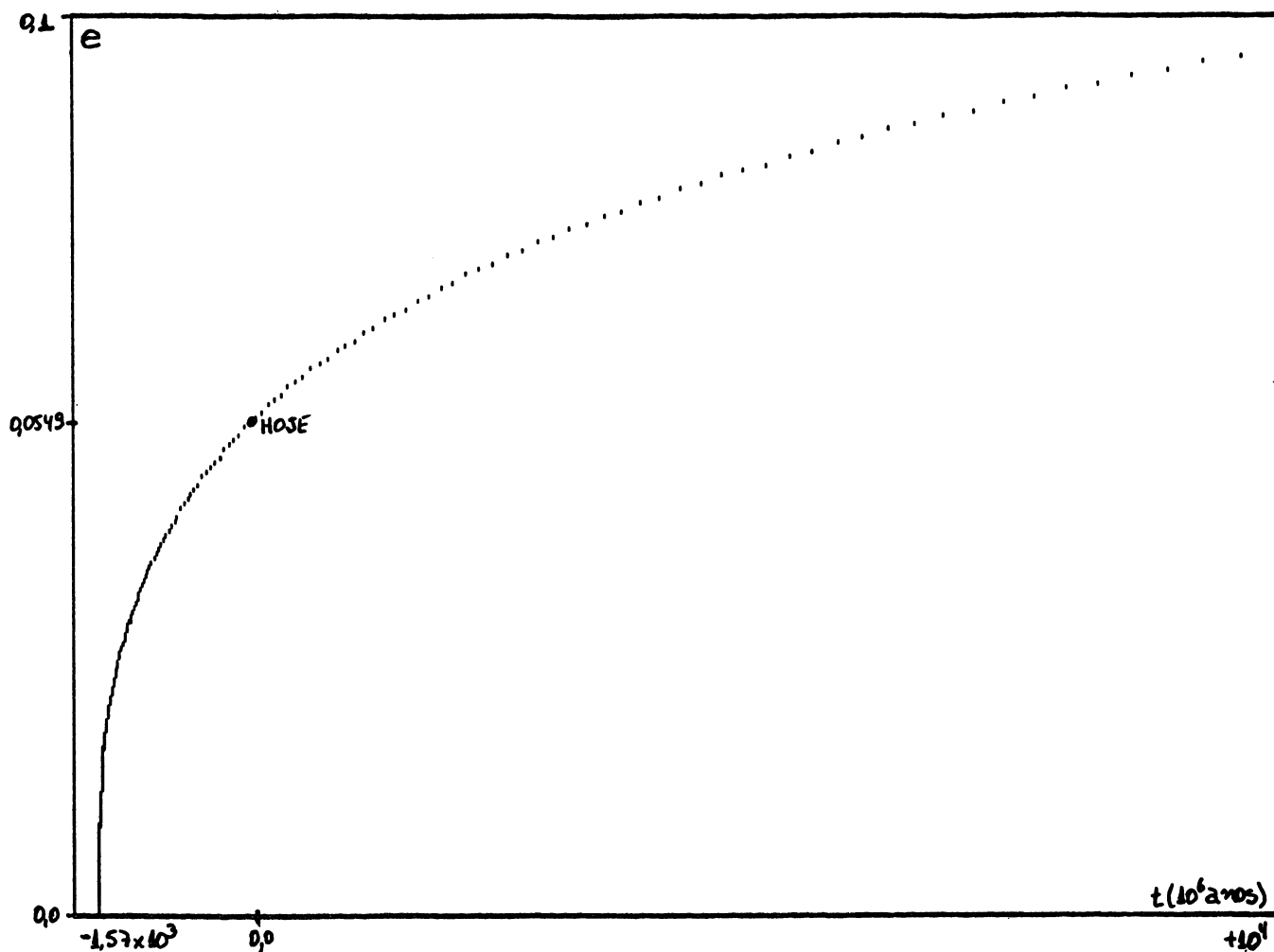


Gráfico IV.02- e versus t , com atraso de resposta constante.

Vemos que para um intervalo de tempo muito grande (10 bilhões de anos), a excentricidade ainda aumenta. Sabendo que o sistema Terra-Lua tende para uma situação de equilíbrio estável, e que esta situação corresponde a uma excentricidade nula, então concluímos que tal equilíbrio irá demorar muito para ocorrer.

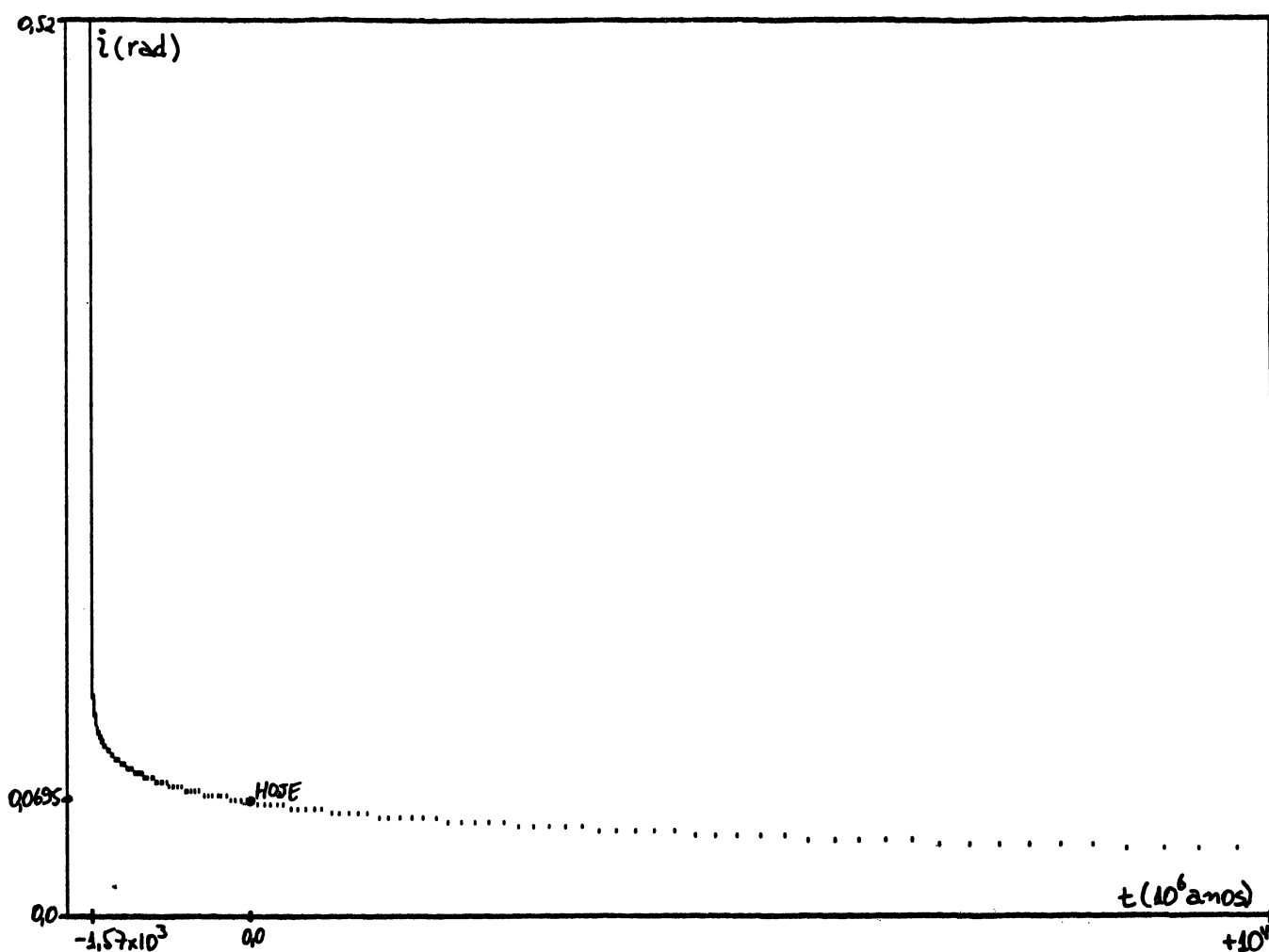


Gráfico IV.04- i versus t , com atraso de resposta constante.

A inclinação lentamente assintota a reta $i=0$. Por este gráfico também percebemos que a condição de equilíbrio se estabelecerá após muito tempo.

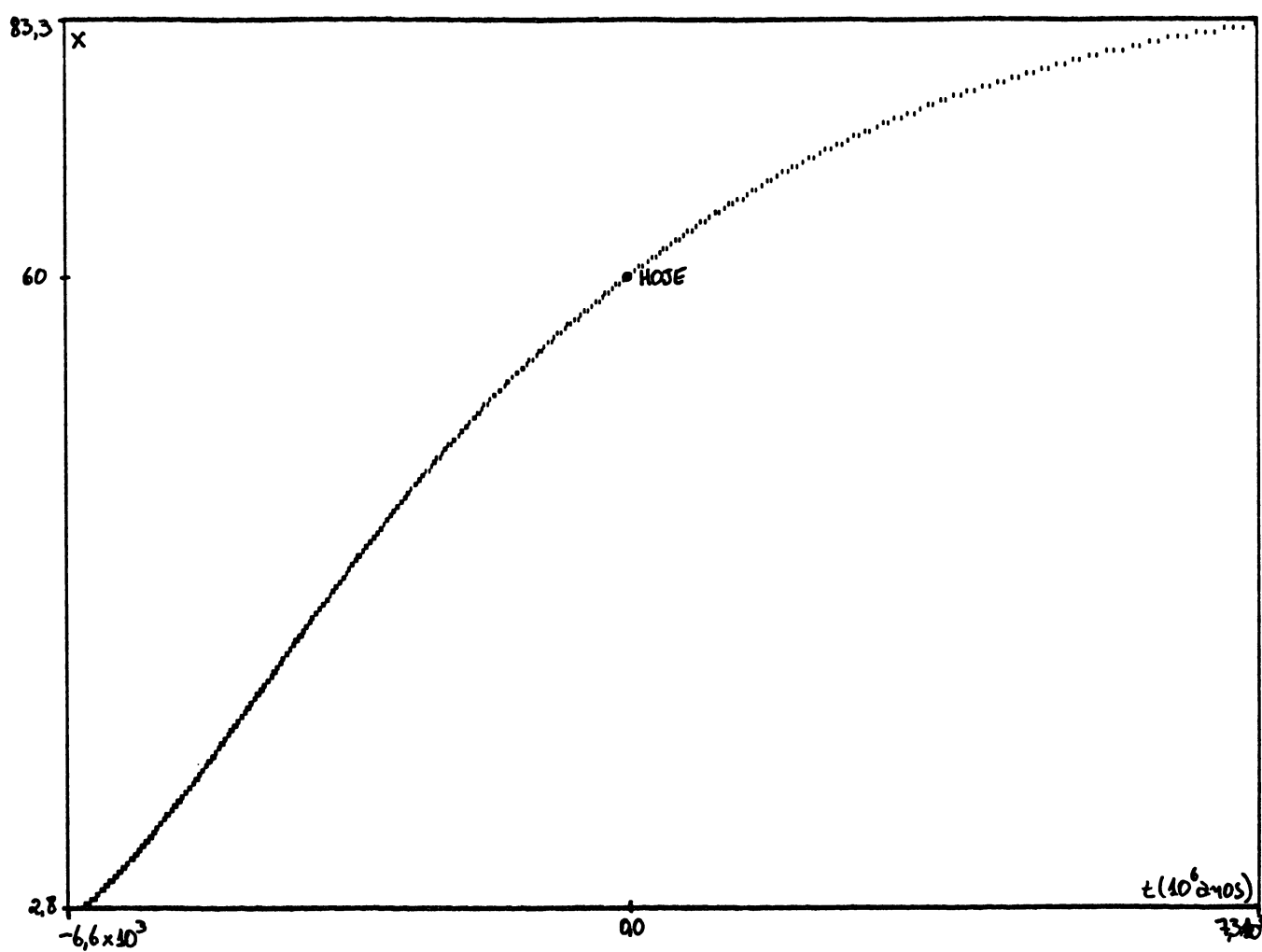


Gráfico IV.05- X versus t , com atraso de resposta variável.

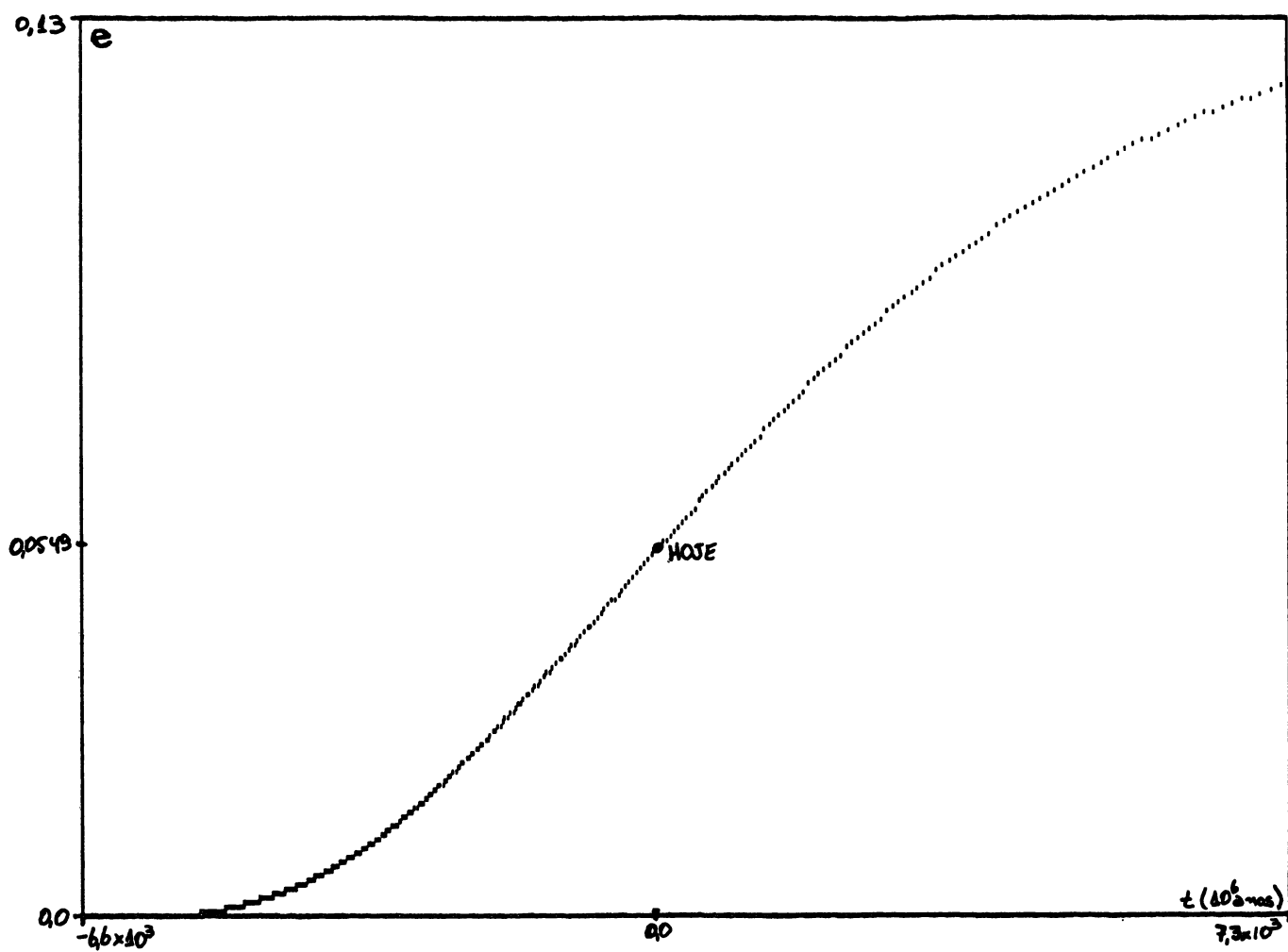


Gráfico IV.06- e versus t , com atraso de resposta variável.

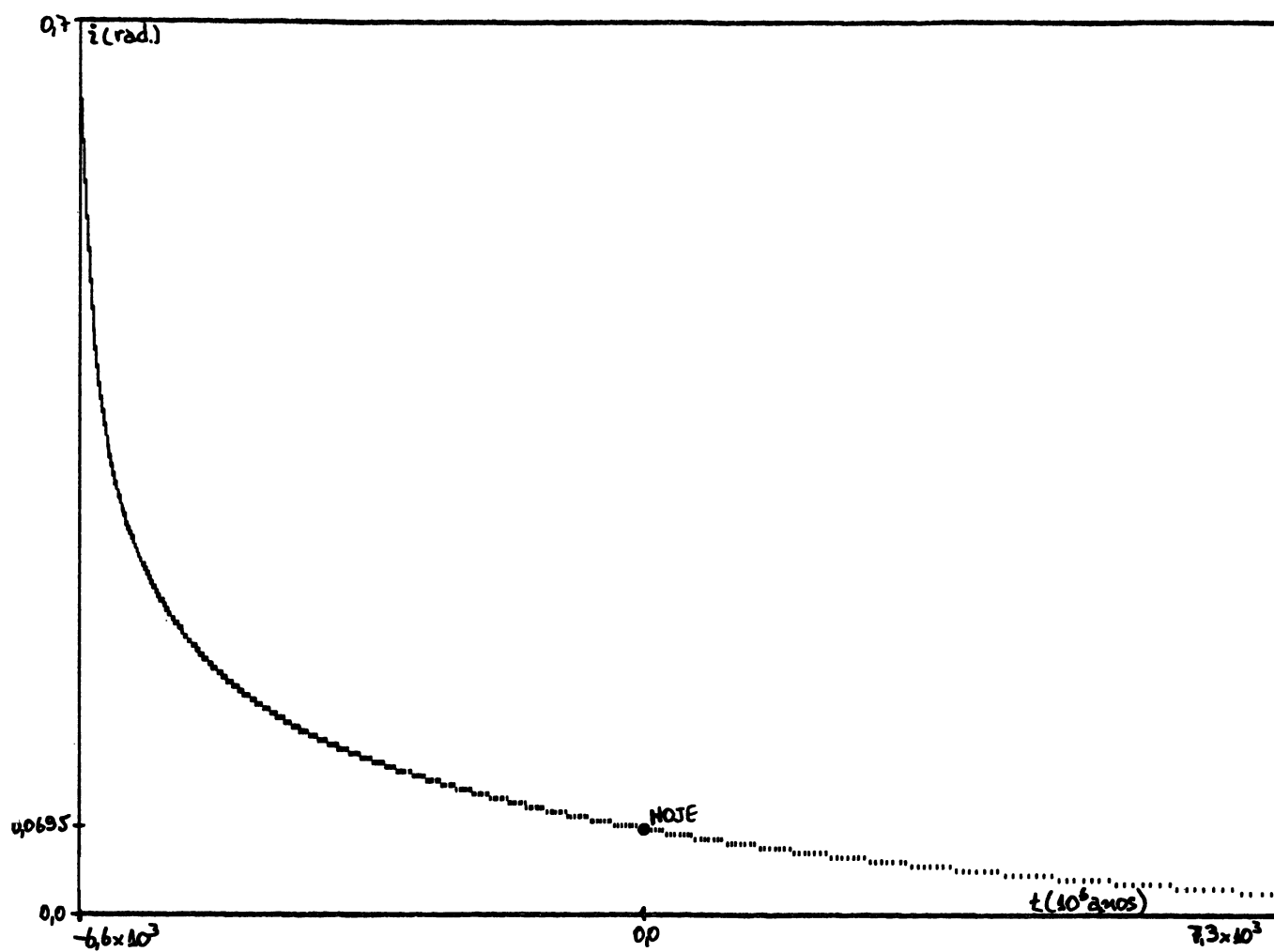


Gráfico IV. 07- i versus t , com atraso de resposta variável.

CONCLUSÃO

Apresentamos aqui uma expressão para o atraso de resposta das marés na Terra, em função de elementos orbitais da Lua (distância Terra-Lua, excentricidade orbital e inclinação do plano de órbita). Ela é um fator de correção para que as equações dinâmicas satisfaçam a observações paleontológicas.

No que se refere ao período que vem do Devoniano Médio até os dias de hoje, se partirmos de condições iniciais correspondentes aos atuais valores de excentricidade, inclinação e semi-eixo maior da órbita lunar, a integração numérica para o passado evidenciará que o valor de Δt há 380 milhões de anos era 20% menor que o atual. Isto mostra a importância de nosso trabalho mesmo para períodos de tempo relativamente pequenos.

A consideração de que $\dot{\omega}$ é linearmente dependente de ω , conforme se deduz das observações paleontológicas, é bastante razoável, como pode ser observado no gráfico IV.01.

Além disso, a consideração feita por Mignard, de um atraso de resposta constante, conduz a uma integração numérica que nos dá o ponto de menor distância Terra-Lua há 1.6 bilhão de anos. Porém, ao introduzirmos o fator de correção em Δt , obtido com a

ajuda da arqueologia, podemos ter um sistema que nos fornece o ponto de menor distância há cerca de 6.6 bilhões de anos, o que é mais compatível com as atuais teorias que mostram que o sistema Terra-Lua surgiu há pelo menos 4.5 bilhões de anos.

Um modelo mais preciso poderia levar em consideração a interação do sistema Terra-Lua com o Sol (problema de três corpos). Já uma maneira de generalizar este trabalho é levar em consideração o efeito dissipativo de correntes de maré no satélite.

REFERÊNCIAS

- ADAMS, J., 1853: On the Secular Variation of the Moon's Mean Motion, Mont. Not XIV, 1854, 59.
- AFONSO, G. B., 1977: Tese de Mestrado, UFPR, PR.
- AFONSO, G. B., SANT'ANNA, A. S., 1989: A Semi-Empirical Model for the Dynamical Evolution of the Earth-Moon System, Orbital Dynamics of Natural and Artificial Objects, O.N., CNPq, R.J.
- BENZ, W., SLATTERY, W. L. e CAMERON, A. G. W., 1986: The Origin of the Moon and the Single-Impact Hypothesis I, Icarus 66, 515-535.
- BENZ, W., SLATTERY, W. L. e CAMERON, A. G. W., 1987: The Origin of the Moon and the Single-Impact Hypothesis II, Icarus 71, 30-45.
- BROWER, D. e CLEMENCE, G. M., 1961: Methods of Celestial Mechanics, Academic Press, New York.
- DARWIN, G. H., 1872: Tidal Friction, Scientific Papers 2, 208-383.
- DELAUNAY, C., 1865: Mémoires de l'Académie XXVIII.
- DOBROVOLSKIS, A. R. e INGERSOLL, A. P., 1980: Atmospheric Tides and the Rotation of Venus I, Icarus, 41, 1-17.
- DOBROVOLSKIS, A. R., 1980: Atmospheric Tides and the Rotation of Venus II, Icarus, 41, 18-35.
- DOBROVOLSKIS, A. R., 1983: Atmospheric Tides on Venus III, Icarus, 56, 165-175.

- GERSTENKORN, H., 1955: Über Gezeitenreibung beim Zweikörperproblem, Z. Astrophys., 36, 245-274.
- GOLDREICH, P., 1966: History of the Lunar Orbit, Rev. Geophys., 4, 411-439.
- HALLEY, E., 1695: Some Account of the Ancient State of the City of Palmyra with Short Remarks on the Inscriptions Found There, Phil. Trans., 19, 106-175.
- KAULA, W. M., 1964: Tidal Dissipation by Tidal Friction and the Resulting Orbital Evolution, Rev. Geophys., 2, 661-685.
- KELLOGG, O., 1967: Foundations of Potential Theory, Springer-Verlag.
- LAMBECK, K., 1975: Effects of Tidal Dissipation in the Oceans on the Moon Orbit and the Earth Rotation, J. Geophys. Res., 80, 2917-2925.
- MACDONALD, G., 1964: Tidal Friction, Rev. Geophys., 2, 467-541.
- MIGNARD, F., 1979: The Evolution of the Lunar Orbit Revisited I, The Moon and the Planets, 20, 301-315.
- MIGNARD, F., 1980: These de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6.
- MONTUCLA, J., 1799: Histoire des Mathématiques, Tome 4, Paris.
- PATTERSON, C. W., 1987: Resonance Capture and the Evolution of the Planets, Icarus 70, 319-333.
- TISSERAND, F., 1894: Traité de Mécanique Céleste, Tome 4, Paris.
- WELLS, J. W., 1963: Coral Growth and Geochronometry, Nature, 197, 948-950.